

Komputerowa symulacja pola elektromagnetycznego

dr hab inż. Mateusz Pasternak
mateusz@wel.wat.edu.pl
<http://strony.aster.pl/mpasternak/>
80/110
22 683 76 67

Wykłady od 1-5 opracowano na podstawie cyklu wykładów Prof. Ludwika Antała
za zgodą Autora

ZAŁOŻENIA I CELE PRZEDMIOTU

- Zapoznać ze zjawiskami fizycznymi związanymi z propagacją fal elektromagnetycznych w różnych ośrodkach
- Zapoznać z podstawowymi metodami symulowania pól elektromagnetycznych
- Nauczyć praktycznych umiejętności implementacji wybranych metod na maszyny liczące

razem	wykłady	ćwiczenia	laboratoria	projekt
30	12	10	-	8

6. TREŚCI PROGRAMOWE

Lp.	temat/tematyka zajęć	w.	ćw.	lab.	proj.
1.	Wprowadzenie. Podstawowe informacje dot. celu i metod symulacji	2			
2.	Repetytorium z podstaw elektromagnetyzmu. Równania Maxwella i równia falowe	2			
3.	Przegląd podstawowych metod symulacyjnych	2			
4.	Metoda Monte Carlo	2	2		
5.	Metoda Elementów skończonych	2	4		
6.	Metoda Różnic skończonych w dziedzinie czasu	2	4		
7.	Realizacja programu symulacyjnego				8
Razem		12	10	-	8

LITERATURA

podstawowa:

L. Tarricone, A. Esposito, Grid Computing for Electromagnetics, Artech House 2004.

C. A. Chung, Simulation modeling handbook. A Practical Approach, CRC Press 2004.

uzupełniająca:

S. J. Chapman, Matlab programing for engineers, CL-Engineering, 2007.

K. E. Lonngren, S. V. Savov, Fundamentals of electromagnetics with Matlab, Scitech, 2005

Etymologia

similis (łac.) - podobieństwo, podobny

similo (łac.) - podobnie

simulare (łac.) - udawać, upodabniać się

μιμεισται (grec.) - naśladować, grać rolę

imitatio (łac.) - naśladowanie

Symulacja: udawanie/naśladowanie zjawiska przy pomocy maszyny, zwykle komputera.

Historia

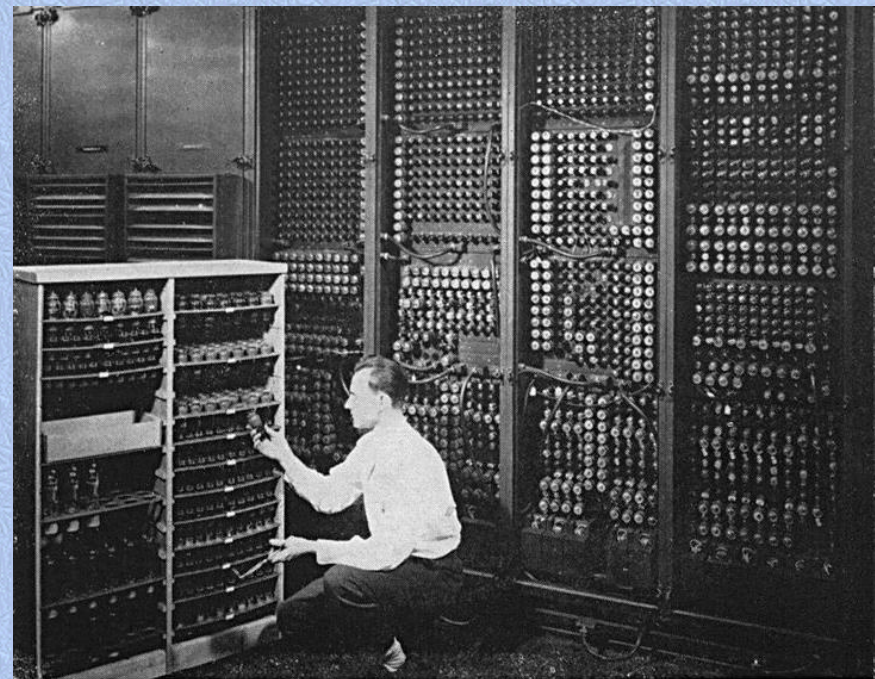
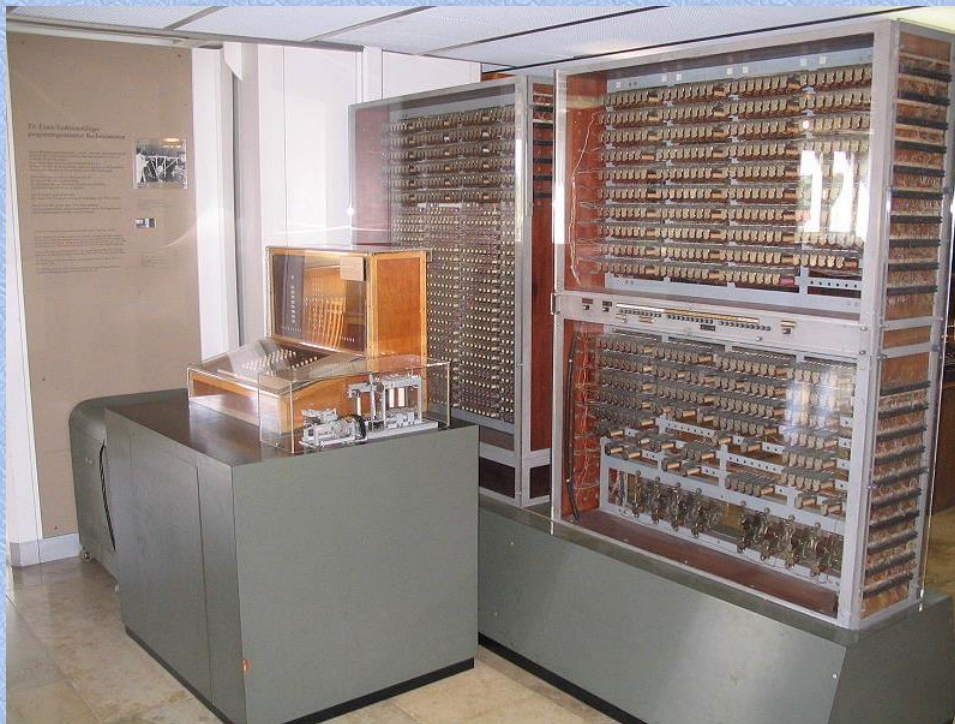
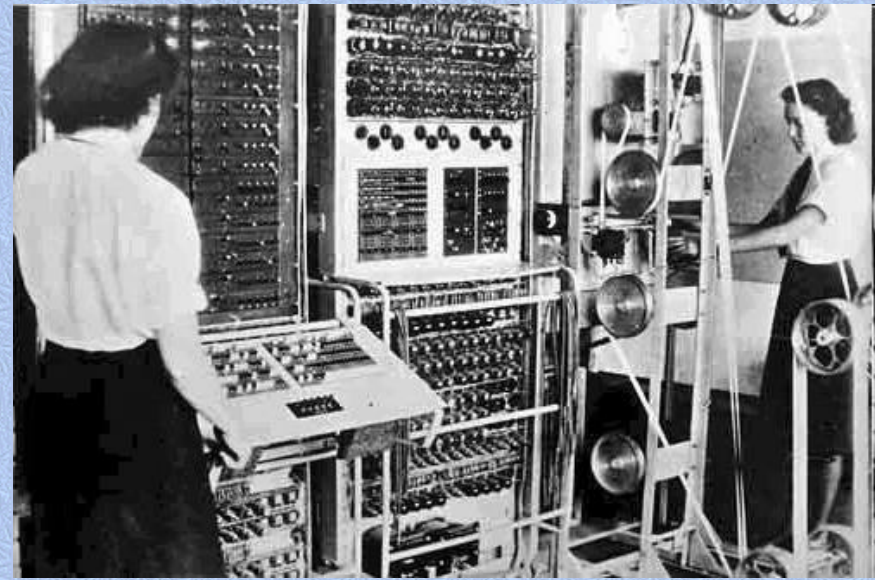
Herodot opisuje przebieg wieloosobowej gry, odtwarzającej rządzenie w państwie Medów za panowania Astiagesa ok. roku 567 p.n.e. Głównym uczestnikiem tej gry, odtwarzającym rolę króla był Cyrus - przyszły król Persji.

Pomiędzy II-I w. p.n.e. w starożytnym Rzymie uprawiano ćwiczenia prawnicze o charakterze gier, w których uczestnicy występujący w rolach powoda i pozwanego toczyli symulowany spór sądowy. Takie ćwiczenia w sprawowaniu sądów miały w starożytności także charakter zabawy.

Najwcześniejsza wzmianka o symulacji w zastosowaniach militarnych dotyczy wojennej gry symulacyjnej prowadzonej przez Filopojmena (253-183 r. p.n.e.), przywódcę i stratega Związku Achajskiego, który doskonalił swoją sztukę wojenną poprzez studiowanie i analizę hipotetycznych ruchów wojsk i terenową ich weryfikację.

Los Alamos

*koniec lat 50-tych:
metoda cząstek,
metoda Monte Carlo*



Replacing a bad tube meant checking among ENIAC's 19,000 possibilities.

1. Metody ciągłe

Wykorzystanie funkcji ciągłych w opisie formalnym charakterystyk zmiennych stanu systemu (zmiana stanu systemu jako funkcja ciągła);

wykorzystanie funkcji ciągłych lub quasi-ciągłych w opisie zjawiska upływu czasu

2. Metody dyskretne

*Wykorzystanie funkcji dyskretnych w opisie formalnym charakterystyk zmiennych stanu układu (zmiana stanu układu jako funkcja dyskretna);
wykorzystanie funkcji dyskretnych w opisie zjawiska upływu czasu*

3. Metody mieszane (hybrydowe)

Wykorzystanie funkcji dyskretnych i ciągłych w opisie formalnym charakterystyk

zmiennych stanu układu (zmiana stanu układu jako funkcja dyskretna i ciągła); wykorzystanie funkcji dyskretnych, ciągłych i quasi-ciągłych w opisie zjawiska upływu czasu

Podstawowe cele symulacji

Prognostyczne

wyznaczenie jakościowych lub ilościowych charakterystyk funkcjonowania badanego układu dla określonych warunków

Znane: wejście, funkcja transformacji

Nieznane: wyjście

Identyfikacyjne

Tworzenie jakościowych lub ilościowych opisów zasad (praw) funkcjonowania badanego układu

Znane: wejście, wyjście.

Nieznane: funkcja transformacji.

Racjonalizacyjne

Wyznaczenie warunków funkcjonowania badanego układu, przy których charakterystyki jakościowe lub ilościowe tegoż układu spełniają określone kryteria racjonalności (np. optymalizacja).

Znane: wyjście, funkcja transformacji.

Nieznane: wejście.

Stosowalność

Brak innych metod

Nie istnieją inne sposoby rozwiązania postawionego problemu badawczego (np. brak odpowiedników analitycznych rozważanego modelu, np. w postaci układu równań różniczkowych)

Korzyść ekonomiczna, wymogi etyczne lub biologiczne

Istnieją inne sposoby rozwiązania postawionego problemu badawczego, lecz ze względu na kryteria ekonomiczne (np. energetyczne, efektywnościowe), etyczne lub biologiczne (np. bezpieczeństwa) uznano je za mniej atrakcyjne od metody symulacyjnej

Zalety symulacji

- *Uniwersalizm dziedzinowy*
- *Możliwość agregacji lub dezagregacji modeli*
- *Możliwość eliminacji wpływu czynnika czasu obserwacji*
- *Powtarzalność eksperymentu symulacyjnego w tych samych warunkach*
- *Możliwość badań dla warunków ekstremalnych (nieosiągalnych)*
- *Możliwość wykonania badań nieniszczących*
- *Możliwość realizacji badań bez konieczności budowy prototypu*

Wady symulacji

- *Brak ogólniejszych reguł tworzenia modeli dziedzinowych*
- *Brak uniwersalnych metod rozstrzygania o poprawności budowanych modeli*
- *Brak możliwości automatyzacji procedur budowy modeli*
- *Względna czasochłonność i duże koszty budowy modeli*
- *Duża wrażliwość efektów badań symulacyjnych na "błędy w sztuce"*
- *Nieznajomość wartości potrzebnych parametrów*

Błędy symulacji (najczęściej popełniane)

- *Niepoprawnie określony cel badań symulacyjnych*
- *Nieodpowiedni poziom szczegółowości modelu*
- *Brak wystarczającego dowodu wiarygodności modelu*
- *Użycie niepoprawnych metod i technik konstrukcji modelu*
- *Wnioskowanie indukcyjne wykraczające poza środowisko eksperymentu komputerowego*

Definicje symulacji

odwzorowanie historii stanów oryginału na podstawie historii stanów modelu

technikę numeryczną służącą do dokonywania eksperymentów na pewnych rodzajach modeli matematycznych, które opisują przy pomocy maszyny cyfrowej zachowanie się złożonego układu w ciągu długiego okresu czasu

[Naylor 1975]

użycie modelu w celu chronologicznego tworzenia historii jego stanów, która jest traktowana jako historia stanów modelowanego systemu

[Evans, Wallace, Sutherland (1967)]

technika rozwiązywania problemów drogą obserwacji zachowania się w czasie dynamicznego modelu systemu

[Gordon (1969)]

Typowe etapy symulacji

1. *Określenie układu, sytuacji i celu budowy modelu*
2. *Budowa modelu (konceptualizacja, formalizacja)*
3. *Przygotowanie danych wejściowych symulacji*
4. *Programowanie modelu (operacjonalizacja modelu)*
5. *Eksperyment wstępny (ocena modelu)*
6. *Planowanie eksperymentu symulacyjnego*
7. *Realizacja eksperymentu symulacyjnego*
8. *Analiza i interpretacja wyników symulacji*
9. *Dokumentowanie symulacji*
10. *Praktyczne wykorzystanie wyników symulacji*
11. *Weryfikacja*

Cele symulacji pola elektromagnetycznego

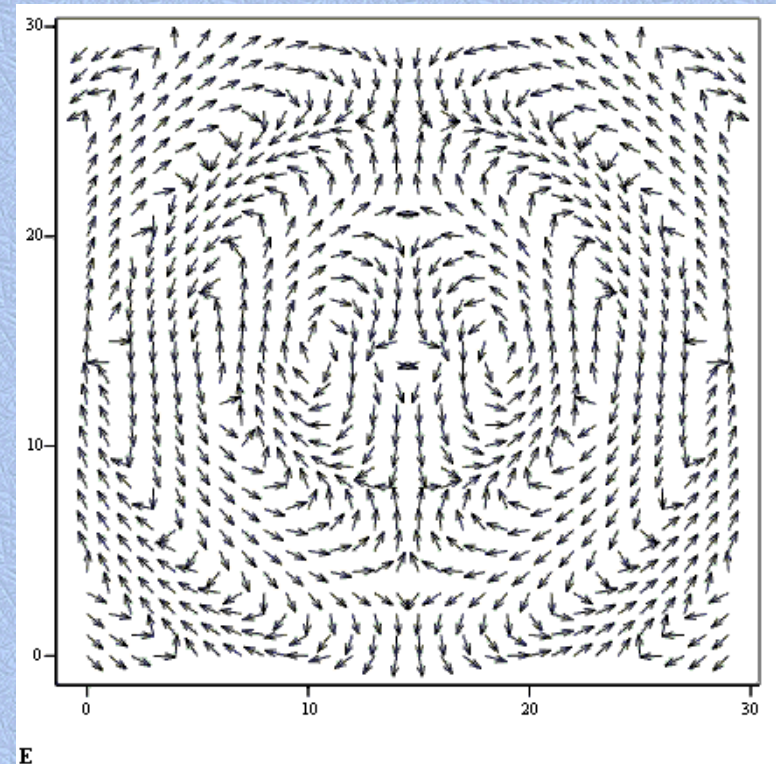
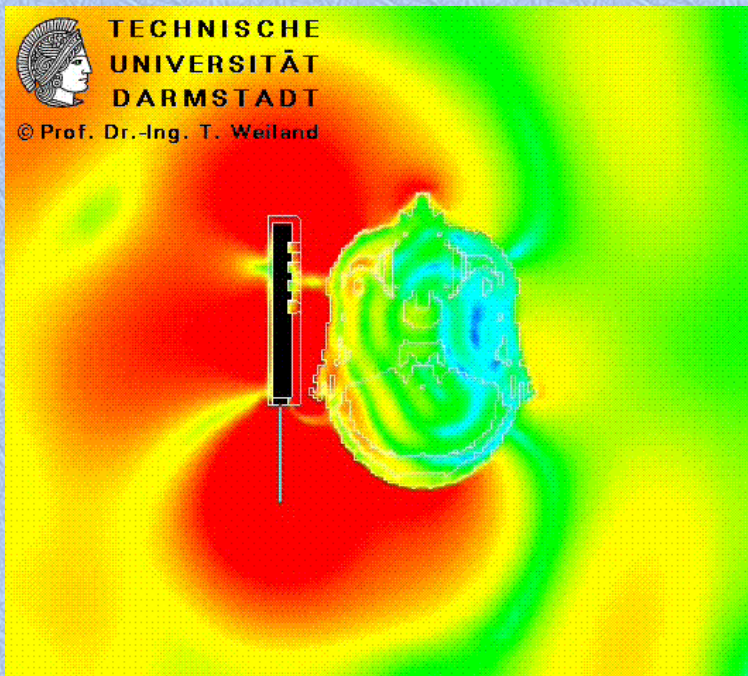
unaocznnienie zjawisk e.m.

optymalizacja

uchwycenie zależności

znalezienie rozkładu i badanie propagacji pola e.m.

w skomplikowanych sytuacjach



Podstawowe metody modelowania wykorzystywane w symulacjach (w przypadku pola e.m.)

funkcji ciągłych

elementów skończonych

elementów brzegowych

różnic skończonych

momentów

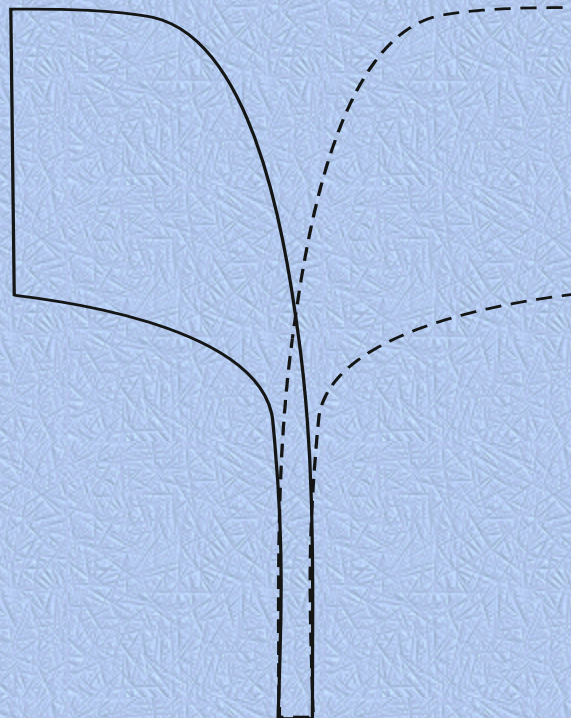
Monte Carlo

Wybór konkretnej metody zależy od sytuacji i wymaga często określonej wiedzy, dużego doświadczenia, a także pewnej dozy intuicji.

Przykład (elektromagnetyczny – wg typowych etapów symulacji)

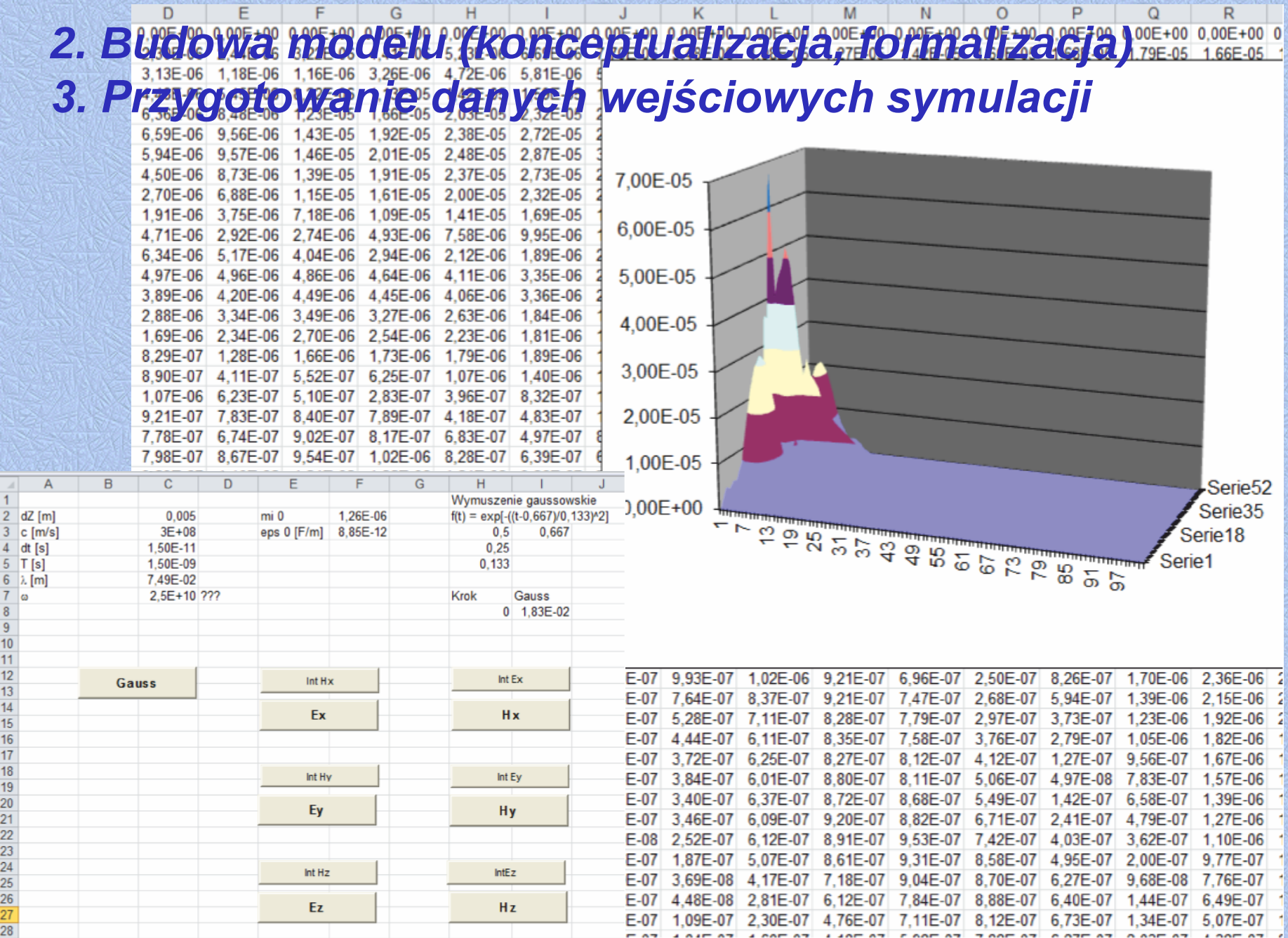
1. Określenie układu, sytuacji i celu budowy modelu

Budowa modelu anteny Vivaldi w celu weryfikacji wpływu geometrii apertury na jej charakterystyki



2. Budowa modelu (konceptualizacja, formalizacja)

3. Przygotowanie danych wejściowych symulacji



4. Programowanie modelu (operacjonalizacja modelu)

```
procedure Mnoz_Ar(var A: Tabl; m,n: integer; r: real);
var i,j :integer;
begin
  for i:=1 to m do
    for j:=1 to n do
      A[i,j]:=A[i,j]*r
    end;
  end;
```

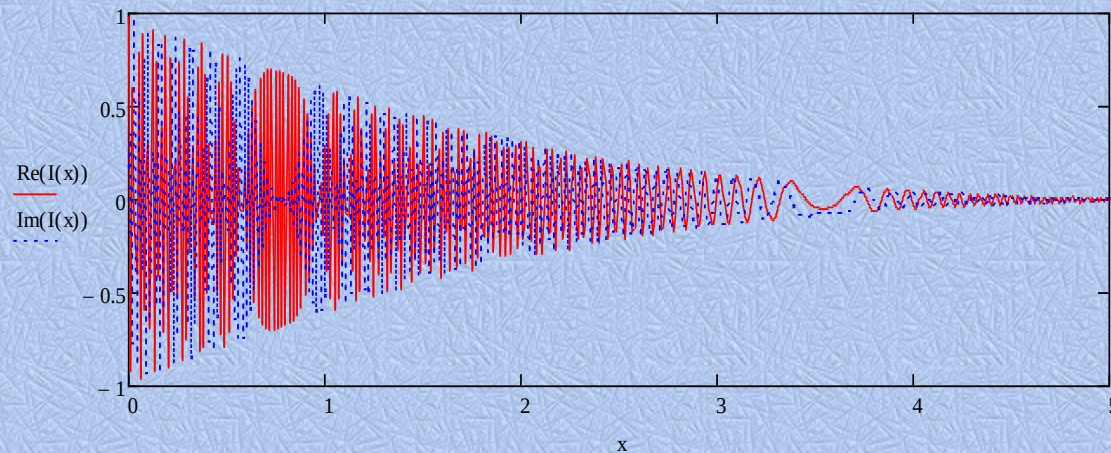
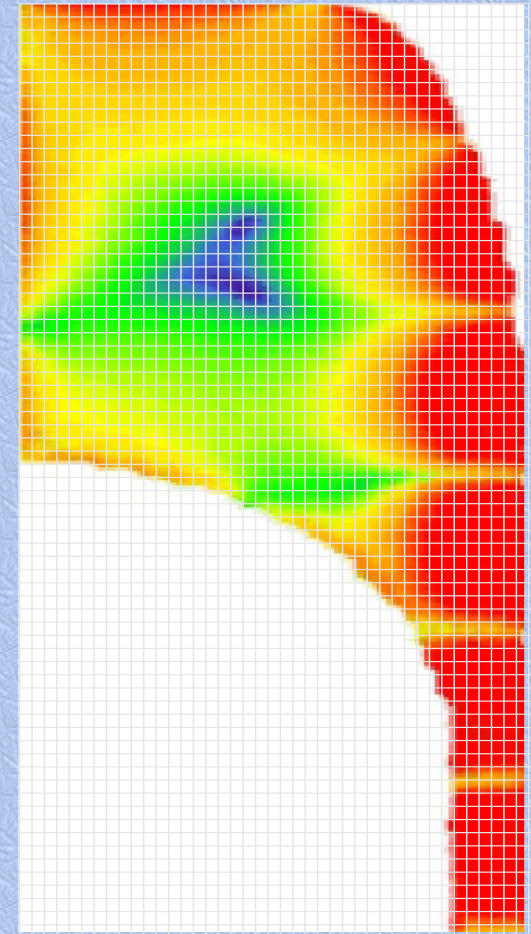
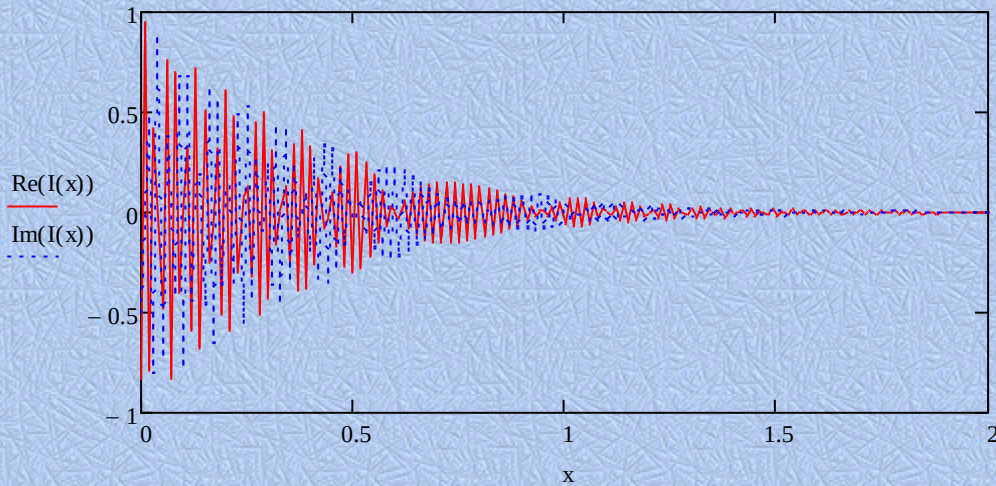
```
procedure Mnoz_AB(var A,B: Tabl; m,n,r: integer);
var i,j,k :integer;
    S :real;
    W :array of real;
BEGIN
  setlength(W,r);
  FOR i:=0 TO M-1 DO
    BEGIN
      FOR k:=0 TO r-1 DO
        BEGIN
          S:=0;
          FOR j:=0 TO N-1 DO
            S:=S+A[i,j]*B[j,k];
          W[k]:=S
        //  D[i,k]:=S
          END;
        for k:=0 to r-1 do A[i,k]:=W[k];
        //  D[i]:=DP
        END
      END;
```

```
procedure Mnoz_ABC(var A,B,C: Tabl; m,n,r: integer);
var i,j,k :integer;
    S :real;
BEGIN
  FOR i:=0 TO M-1 DO
    FOR k:=0 TO r-1 DO
      BEGIN
        S:=0;
        FOR j:=0 TO N-1 DO
          S:=S+A[i,j]*B[j,k];
        C[i,k]:= S;
      END;
    END;
  END;
```

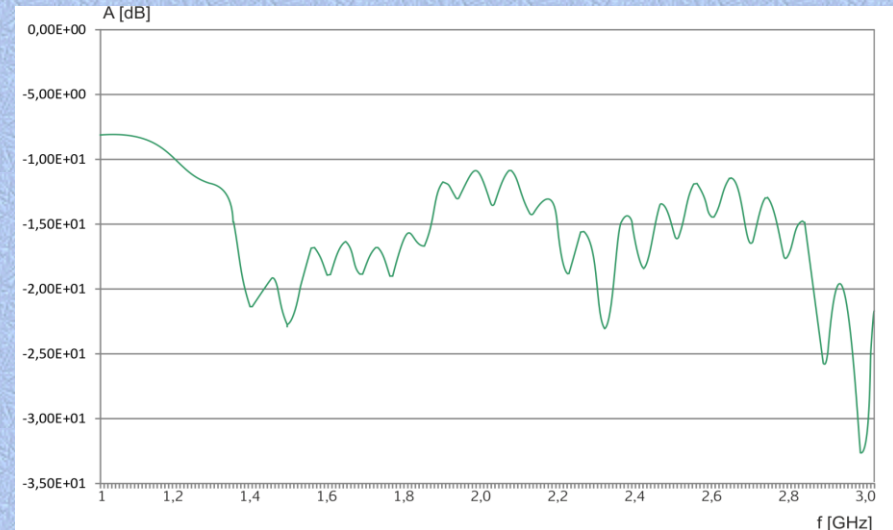
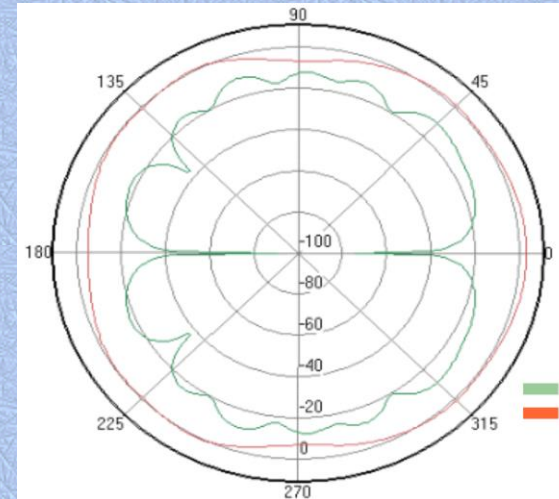
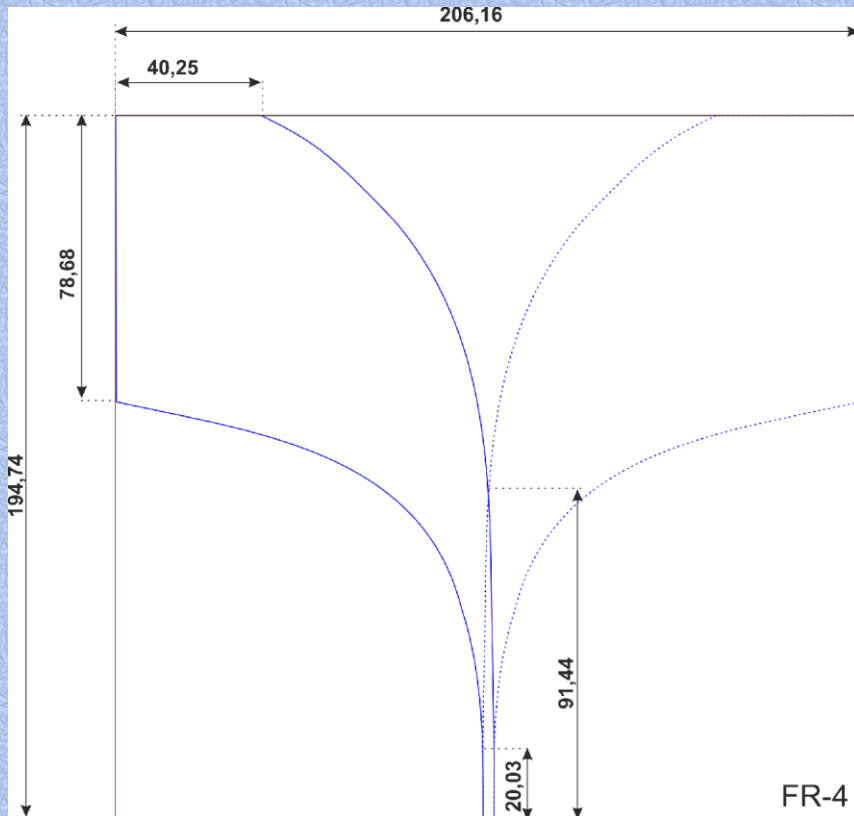
```
function Slad(var A: Tabl; n: integer): real;
var i :integer;
    sl: real;
begin
  sl:=0;
  for i:=1 to n do
    sl:=sl+A[i,i];
  Slad:=sl
end;
```


5. *Eksperyment wstępny (ocena modelu)*

6. *Planowanie eksperymentu symulacyjnego*

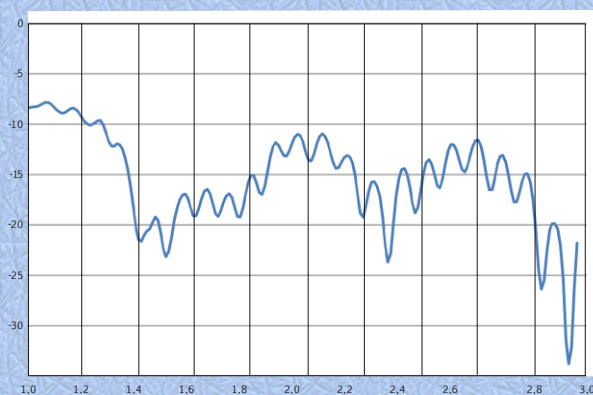
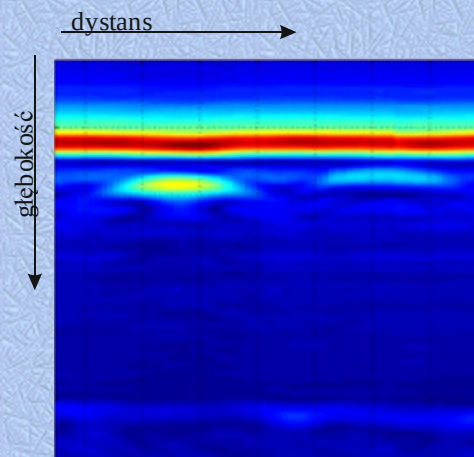
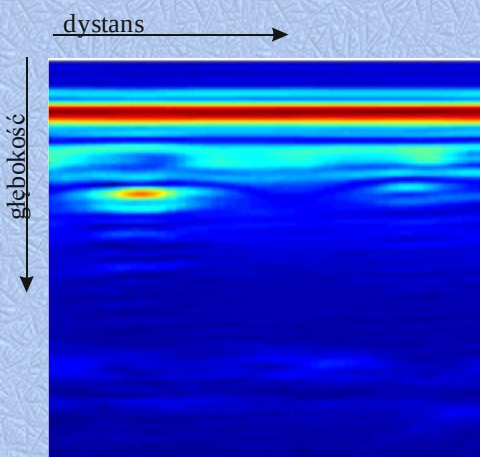
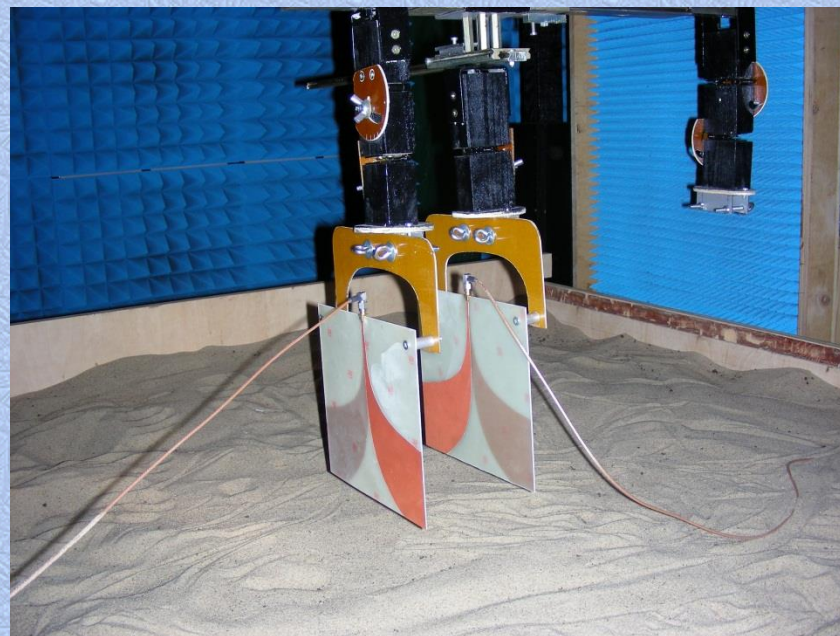
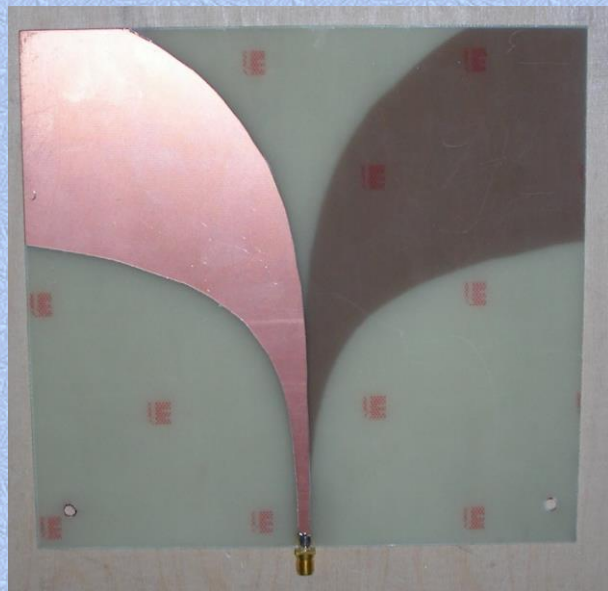


7. Realizacja eksperymentu symulacyjnego
8. Analiza i interpretacja wyników symulacji
9. Dokumentowanie symulacji



10. Praktyczne wykorzystanie wyników symulacji

11. Weryfikacja



Podstawy teorii elektromagnetyzmu repetytorium

W rozwiązywaniu problemów polowych stosuje się techniki:

- doświadczalne
- analityczne
- numeryczne

Eksperymenty są drogie, czasochłonne, bywają niebezpieczne i zwykle nie pozwalają na zmianę parametrów oraz warunków – często też są ekstremalnie trudne w realizacji

Większość problemów analitycznych z zakresu elektromagnetyzmu została rozwiązana do lat 40-tych ubiegłego wieku

Metody numeryczne dają rozwiązania przybliżone. Pomimo tego faktu, są obecnie najlepszym narzędziem rozwiązywania problemów elektromagnetycznych

Najczęściej stosowane metody nieempiryczne

- A. Metody analityczne (rozwiązanie dokładne)
 - rozdzielenia zmiennych
 - przedłużeń analitycznych
 - odwzorowań konforemnych
 - równań całkowych
 - metoda zakłóceń
 - odbić zwierciadlanych
- B. Metody numeryczne (rozwiązanie przybliżone)
 - różnic skończonych
 - residuów ważonych
 - metoda momentu
 - elementów skończonych
 - elementów brzegowych
 - sieci reluktancyjnych
 - macierzy linii transmisyjnych i inne

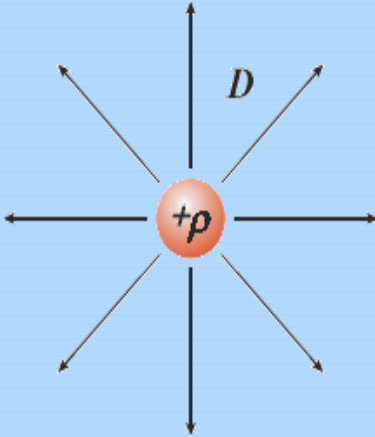
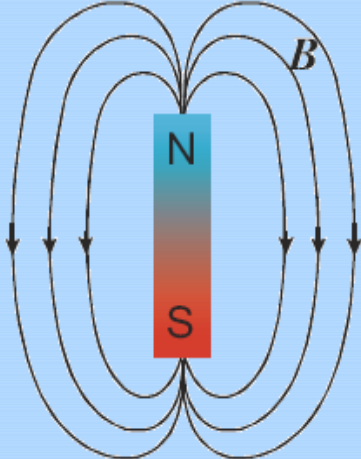
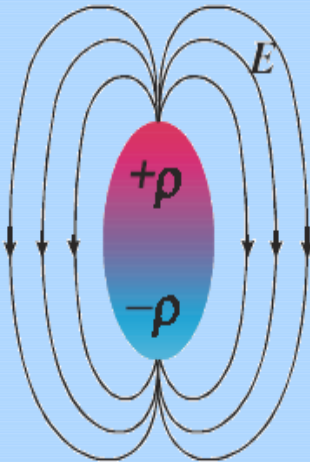
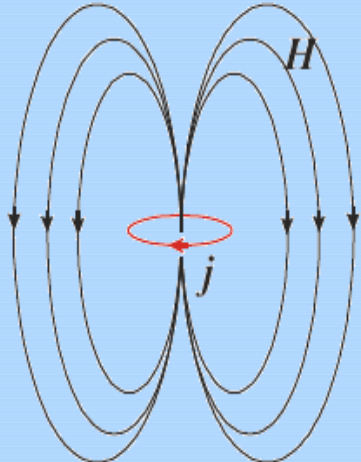
Nazewnictwo metod

Różnorodne metody wzajemnie się inspirują i niektóre z nich są częścią innych lub ich przypadkiem szczególnym. Istnieją również metody hybrydowe łączące w rozwiązywanym problemie elementy różnych metod. Z tego powodu powstają problemy z nazewnictwem i klasyfikacją metod. U różnych autorów te same metody mogą nosić inne nazwy. Niektóre metody stanowiące przypadek szczególny innej metody są traktowane jako oddzielne.

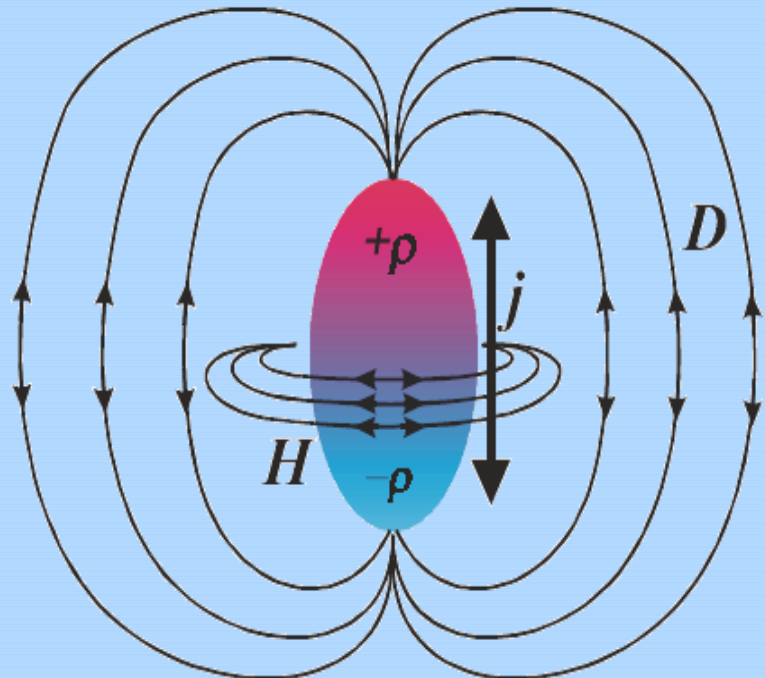
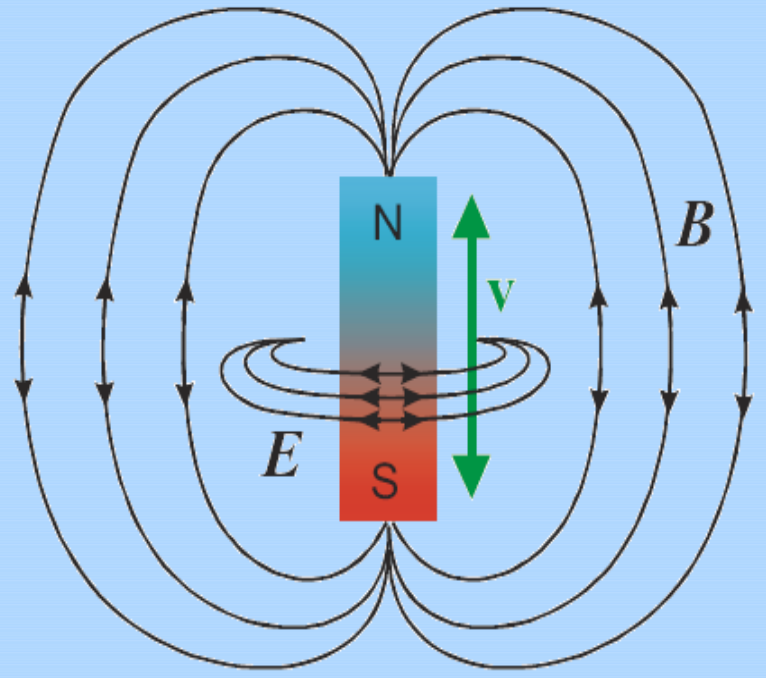


W 1864, **James Clerk Maxwell** (1831-1879), zaproponował jedną z najbardziej kunsztownych teorii w historii nauki. W sławnym memoriale do Towarzystwa Królewskiego przedstawił dziewięć równań reasumujących wszystkie znane prawa elektryczności i magnetyzmu. Nie było to zwykłe skatalogowanie praw natury, ale kompletna teoria makroskopowego elektromagnetyzmu.

Pola statyczne – ładunki, magnesy i pętle z prądem są nieruchome - wektory $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ niezależne.

$\nabla \mathbf{D} = \rho$	 A central orange circle labeled $+\rho$ has eight black arrows pointing radially outwards, representing the electric displacement field $\mathbf{D}$.	$\nabla \mathbf{B} = 0$	 A vertical bar magnet with a blue top labeled 'N' and a red bottom labeled 'S'. Black loops with arrows represent the magnetic field $\mathbf{B}$ lines, which emerge from the North pole and enter the South pole.
$\nabla \times \mathbf{E} = 0$	 An oval-shaped dipole with a pink top labeled $+\rho$ and a blue bottom labeled $-\rho$. Black loops with arrows represent the electric field $\mathbf{E}$ lines, which originate from the positive charge and terminate at the negative charge.	$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{j}$	 A red circular loop with an arrow indicating the direction of current $\mathbf{j}$. Black loops with arrows represent the magnetic field $\mathbf{H}$ lines, which are generated by the current and loop around it.

Pola dynamiczne - ładunki, magnesy i pętle z prądem są ruchome - wektory E i H sprzężone.

$\nabla D = \rho$ prawo Gaussa	$\nabla B = 0$ brak ładunków magnetycznych
$\nabla \times H = j + \frac{\partial D}{\partial t}$ prawo Ampera	$\nabla \times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ prawo Faradaya
	

W formie Minkowskiego równania Maxwella to cztery równania różniczkowe

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \quad \text{Prawo Faraday'a}$$

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \quad \text{Prawo Ampere'a}$$

$$\nabla \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad \text{Prawo Gauss'a}$$

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \text{Magnetyczne prawo Gauss'a}$$

uzupełniane przez tzw. równanie ciągłości

$$\nabla \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\mathbf{r}, t)$$

W jednostkach SI: $\mathbf{E} \rightarrow (\text{V/m})$, $\mathbf{B} \rightarrow (\text{T})$, $\mathbf{H} \rightarrow (\text{A/m})$, $\mathbf{D} \rightarrow (\text{C/m}^2)$

Forma Boffiego dla środowisk polaryzowalnych i magnetyzowalnych

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\mu_0 - \mathbf{M}(\mathbf{r}, t)} \right) = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t))$$

$$\nabla (\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)) = \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\nabla \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$$

Formy Chu i Amperiana zawierają informację o prędkości ruchomego środowiska i nieco inną niż w formie Boffi, fizyczną interpretację elektrycznych i magnetycznych jego właściwości

Najbardziej ogólną formę relacji konstytutywnych między polami można w symbolicznej formie zapisać jako:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}[\mathbf{E}, \mathbf{B}]$$

lub

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E} + \xi \mathbf{H}$$

$$\mathbf{B} = \zeta \mathbf{E} + \mu \mathbf{H}$$

$\mu, \varepsilon, \xi, \zeta$ - w ośrodkach izotropowych
skalarne, w anizotropowych tensorowe

w próżni

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{H}}{\text{m}} \right]$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

$$\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \left[\frac{\text{F}}{\text{m}} \right]$$

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Są trzy zakresy częstotliwości dla których rozwija się techniki numeryczne rozwiązywania problemów polowych. W zależności od stosunku długości fali λ do wymiaru urządzenia rozróżnia się trzy różne techniki analityczne:

Teorię obwodów ($\lambda \gg l$)

Teorię mikrofal ($\lambda \approx l$)

Optykę geometryczną (niezależną od częstotliwości) ($\lambda \ll l$)

Podstawowe prawa teorii obwodów, które mogą być wyprowadzone z równań Maxwell'a przez zastosowanie przybliżenia, są obowiązujące kiedy ($\lambda \gg l$).

Twierdzenie Gauss'a albo dywergencja

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \cdot dv$$

Twierdzenie Stokes'a

$$\int_l \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

ELEKTROSTATYKA

Teoria EM może być traktowana jako badanie pól wytwarzanych przez ładunki elektryczne w spoczynku bądź w ruchu. Pola elektrostatyczne są zazwyczaj wytwarzane przez statyczne ładunki elektryczne, podczas gdy pola magnetostatyczne są skutkiem ruchu ładunków elektrycznych ze stałą prędkością (prąd stały). Dynamiczne lub zmienne w czasie pola są zwykle skutkiem ruchu przyspieszonych ładunków lub zmiennych w czasie prądów.

Dwa podstawowe prawa pól elektrostatycznych to wynikające bezpośrednio z prawa Coulomb'a, prawo Gauss'a

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} \int_V \rho dV & \text{gdy } \rho \text{ w } S \\ 0 & \text{gdy } \rho \text{ poza } S \end{cases}$$

oraz prawo zachowania pola elektrostatycznego

$$\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = 0$$

Stosując do powyższych równań całkowych, twierdzenia Gauss'a i Stokes'a otrzymuje się równania różniczkowe:

$$\begin{array}{ll} \text{div} \mathbf{D} = \rho & \text{rot } \mathbf{E} = 0 \\ \text{lub} & \\ \nabla \cdot \mathbf{D} = \rho & \nabla \times \mathbf{E} = 0 \end{array}$$

Wektory $\mathbf{D}$ i $\mathbf{E}$ są związane zależnością:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$\mathbf{E}$ można też wyrazić przy pomocy potencjału elektrycznego

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V \equiv -\nabla V$$

lub

$$V = -\int_l \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

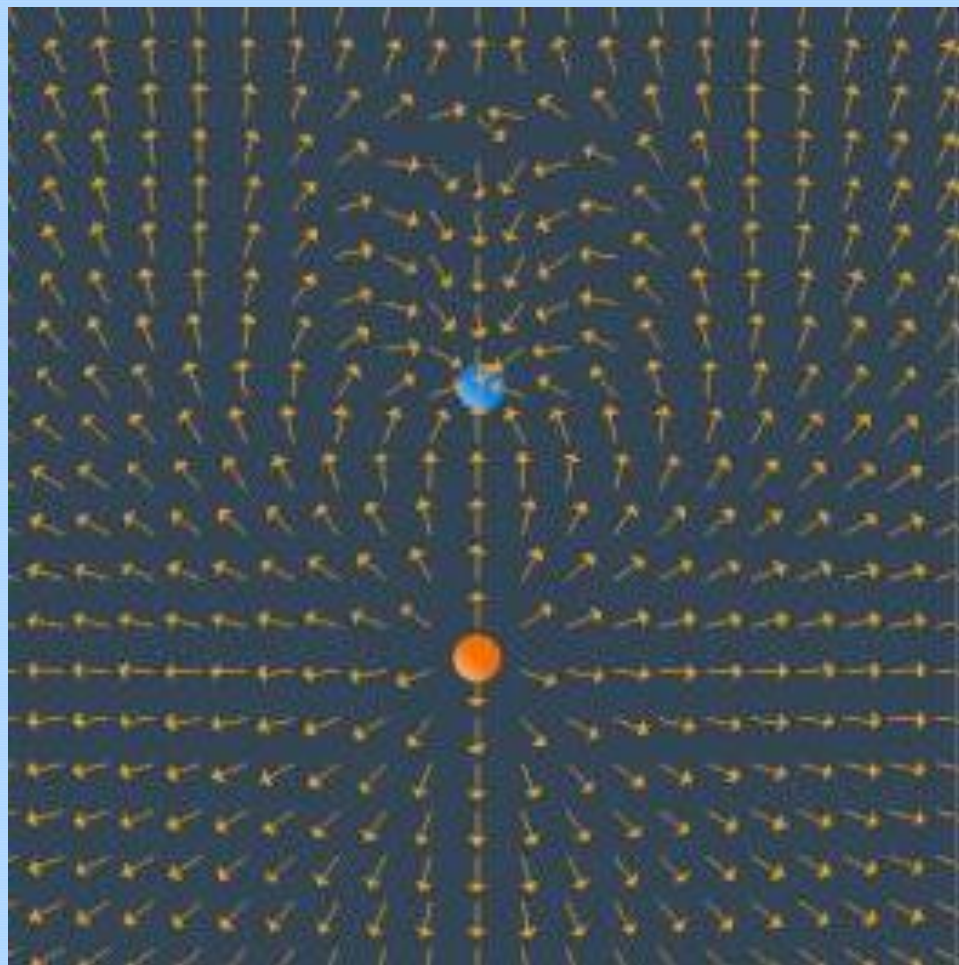
Kombinacja uprzednich równań różniczkowych prowadzi do równania Poisson'a

$$\nabla \varepsilon \nabla V = -\rho \quad \text{Jeżeli } \varepsilon = \text{const} \quad \nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon}$$

Kiedy $\rho = 0$ równanie pola elektrostatycznego przechodzi w równanie Laplace'a

$$\nabla \varepsilon \nabla V = 0 \quad \text{Jeżeli } \varepsilon = \text{const} \quad \nabla^2 V = 0$$

Pole elektrostatyczne

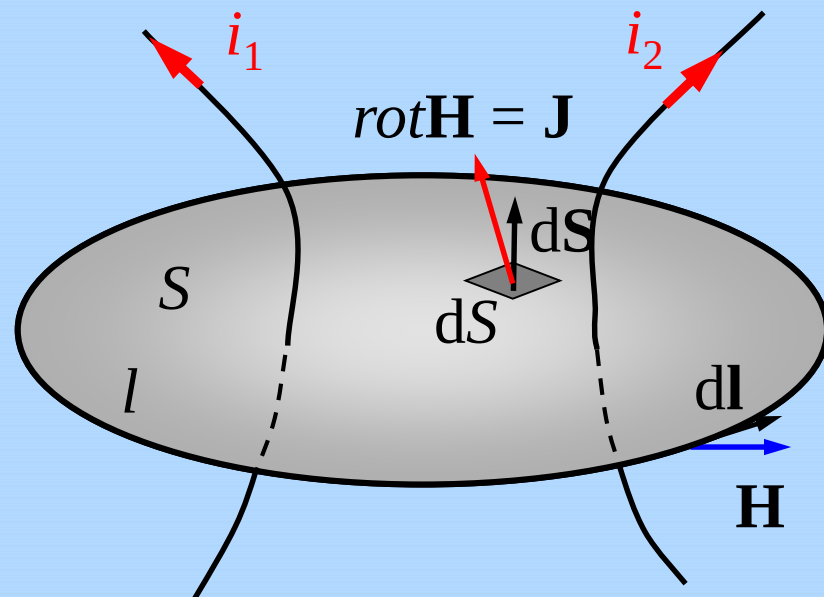
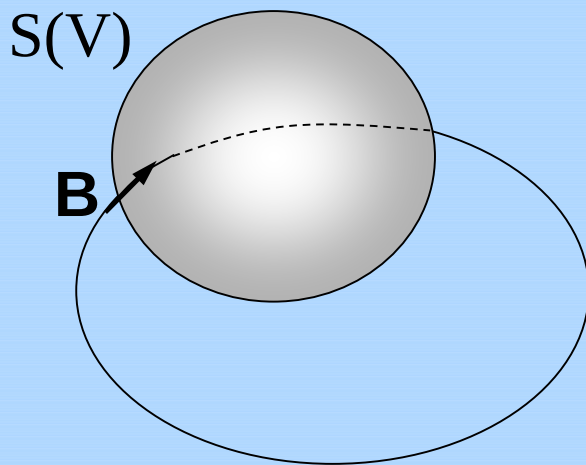


Magnetostatyka

Podstawowymi prawami pola magnetostaticznego są prawo Ampere'a (nazywane też prawem przepływu) związane z prawem Biot – Savart'a

$$\oint_l \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

oraz prawo zachowania strumienia magnetycznego (nazwanego też magnetycznym prawem Gauss'a)



$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Twierdzenia Gauss'a i Stokes'a jak poprzednio pozwalają przekształcić równania całkowe w równania różniczkowe:

$$\textit{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \equiv \quad \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

oraz

$$\textit{div} \mathbf{B} = 0 \quad \equiv \quad \nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

Pola wektorowe $\mathbf{B}$ i $\mathbf{H}$ są związane przenikalnością magnetyczną ośrodka μ (H/m).

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$$

Również wektor $\mathbf{J}$ związany jest z $\mathbf{E}$ konduktywnością σ (S/m)

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad \text{polowa postać prawa Ohma}$$

Potencjał wektorowy to wektor zdefiniowany następująco:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad \text{div } \mathbf{A} = 0$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \text{rot } \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$$

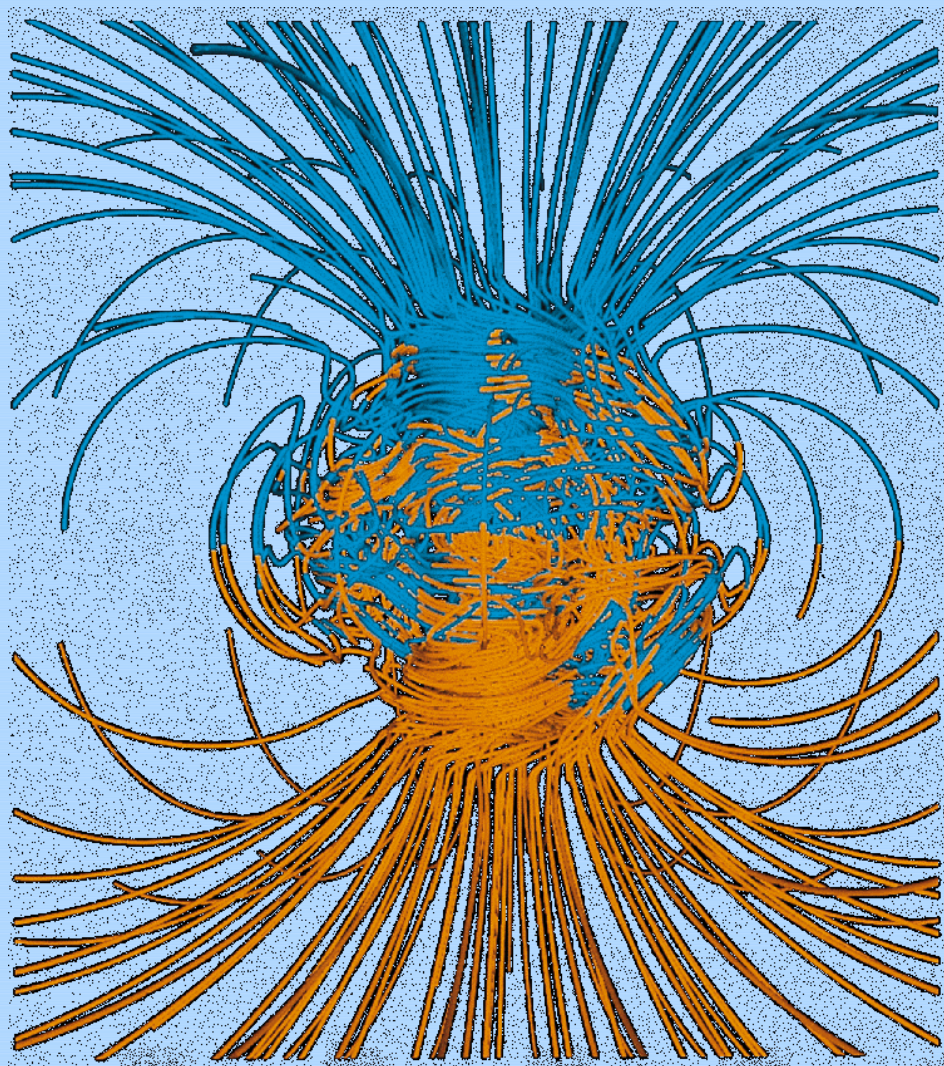
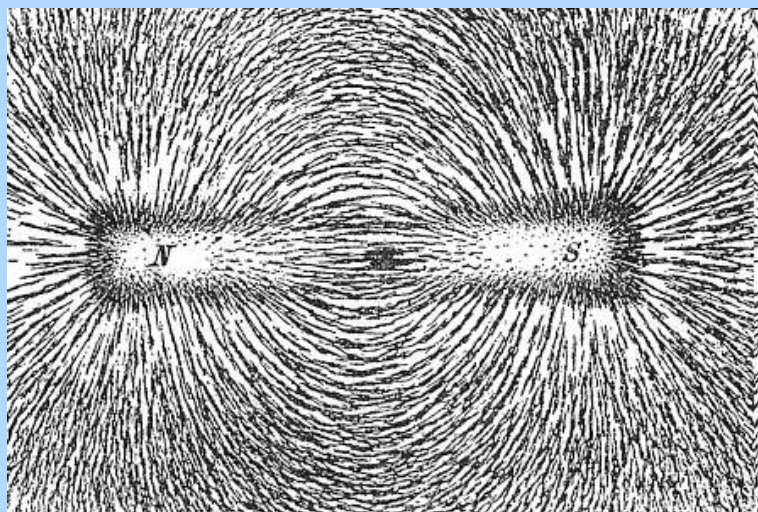
$$\text{rot rot } \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\text{rot rot } \mathbf{A} \equiv \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu \mathbf{J}$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu \mathbf{J} \quad \begin{array}{l} \text{Równanie Poisson'a dla pól} \\ \text{magnetostatycznych} \end{array}$$

Kiedy $\mathbf{J} = 0$ równanie przechodzi w równanie Laplace'a $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$

Pole magnetostatyczne



Pole stałe w czasie, ale występujące w obecności prądów, w ciałach nieruchomych, to **pole elektroprzepływowe**.

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0$$

$$\text{div} \mathbf{D} = 0$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{obc}}) \quad \text{div} \mathbf{J} = 0$$

Z tożsamości różniczkowej

$$\text{div rot } \mathbf{H} \equiv 0 = \text{div } \mathbf{J}$$

Równania $\text{div } \mathbf{J} = 0$ i $\text{rot } \mathbf{E} = 0$

są odpowiednikami I i II prawa Kirchhoffa

Klasyfikacja problemów elektromagnetycznych

Klasyfikacja problemów EM ułatwia dobór najlepszej metody do rozwiązania konkretnego problemu

Problemy EM można podzielić ze względu na:

obszar rozwiązania

charakter równania opisującego problem

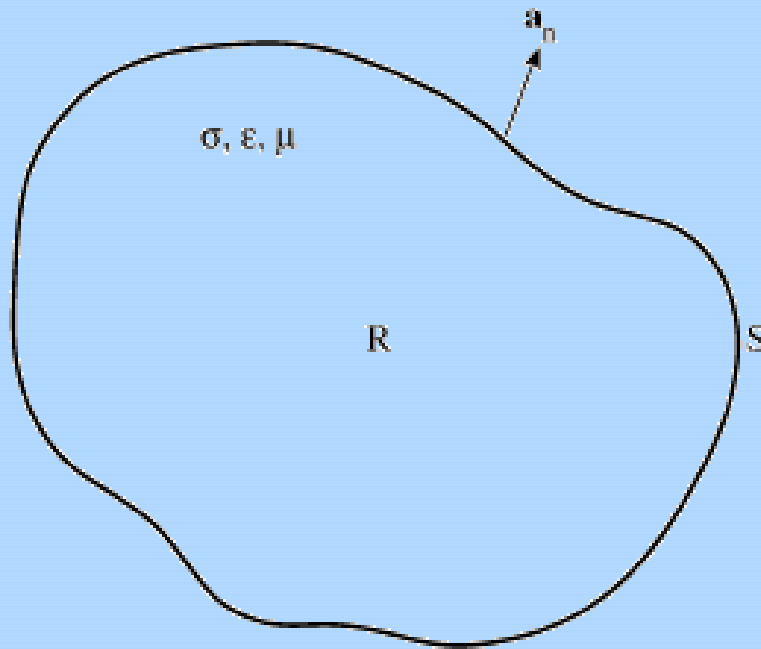
warunki graniczne

Te trzy zagadnienia jednoznacznie określają rozwiązywany problem. Niekiedy są one od siebie zależne.

Klasyfikacja problemów ze względu na region rozwiązania

Problem **wewnętrzny** (zamknięty, ograniczony)

Problem **zewnętrzny** (otwarty, nieograniczony)



Obszar rozwiązania R
otoczony granicą S

Propagacja fali w falowodzie jest problemem wewnętrznym.

Propagacja fali w przestrzeni nieograniczonej (np. promieniowanie anteny) jest problemem zewnętrznym.

Problemy mogą być również klasyfikowane ze względu na własności „konstrytywne” (σ , ϵ , μ) regionu rozwiązania.

Regiony mogą więc być:

liniowe lub **nieliniowe** (σ, ϵ, μ niezależne lub zależne od E i H),

jednorodne lub **niejednorodne** (σ , ϵ , μ nie są lub są funkcjami zmiennych przestrzennych),

izotropowe lub **anizotropowe** (σ , ϵ , μ są niezależne lub zależne od kierunku).

Klasyfikacja problemów ze względu na rozwiązywane równanie

Rozwiązywane równania mogą być różniczkowe, całkowe lub różniczkowo-całkowe, co ogólnie można zapisać równaniem operatorowym:

$$L\Phi = g$$

L – operator

g – wzbudzenie lub źródło,

Φ – szukana funkcja.

Przykład.

Problem elektrostatyczny rozwiązywany równaniem Poisson'a:

$$\begin{array}{lll} -\nabla^2 V = \frac{\rho}{\varepsilon} & L = -\nabla^2 & \text{operator Laplace'a,} \\ & g = \frac{\rho}{\varepsilon} & \text{określenie źródła,} \\ & \Phi = V & \text{potencjał elektryczny} \end{array}$$

Równanie Poisson'a w postaci całkowej:

$$V = \int \frac{\rho}{4\pi\epsilon r^2} dv$$

więc

$$L = \int \frac{dv}{4\pi r^2}$$

$$g = V$$

$$\Phi = \frac{\rho_v}{\epsilon}$$

Rozważmy ogólniejsze równanie różniczkowe o pochodnych cząstkowych (PDE) charakterystyczne dla problemów EM (liniowe, rzędu drugiego, na płaszczyźnie):

$$a \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + d \frac{\partial \Phi}{\partial x} + e \frac{\partial \Phi}{\partial y} + f \Phi = g$$

Współczynniki a , b i c są w ogólności funkcjami x i y , ale mogą być również zależne od Φ . Wówczas równanie jest nieliniowe. PDE w którym $g(x,y) = 0$ nazywamy jednorodnym, a gdy $g(x,y) \neq 0$ niejednorodnym.

Operator różniczkowy:
$$\mathbf{L} = a \frac{\partial^2}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2}{\partial y^2} + d \frac{\partial}{\partial x} + e \frac{\partial}{\partial y} + f$$

Równanie może mieć określone warunki brzegowe i początkowe. PDE z określonymi warunkami brzegowymi to równanie stanu ustalonego (*steady-state equations*). Jeżeli tylko warunki początkowe są określone to równanie opisuje stan przejściowy (*transient equations*).

Każde liniowe PDE, rzędu drugiego, może być zakwalifikowane jako:

- eliptyczne,
- hiperboliczne,
- paraboliczne,

w zależności od wartości współczynników a , b , c .

Jeżeli		to PDE jest	
	$b^2 - 4ac < 0$		eliptyczne
	$b^2 - 4ac > 0$		hiperboliczne
	$b^2 - 4ac = 0$		paraboliczne

Terminologia wynika z faktu, że równanie kwadratowe o postaci

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

reprezentuje hiperbolę, parabolę, lub elipsę jeśli $(b^2 - 4ac)$ jest dodatnie, zerowe lub ujemne.

Każda z tych kategorii równań modeluje określone zjawiska fizyczne (nie tylko elektromagnetyczne). Równania te opisują niemal cały obszar nauki i techniki. Matematyczny model zawarty w analizowanym równaniu opisuje tak różne zjawiska jak przewodzenie ciepła, przepływ laminarny, wibracje, sprężystość, elektrostatykę czy propagację fal.

Eliptyczne równania są związane z problemami stanu ustalonego czyli z zagadnieniami brzegowymi.

Typowymi przykładami takich równań są równania

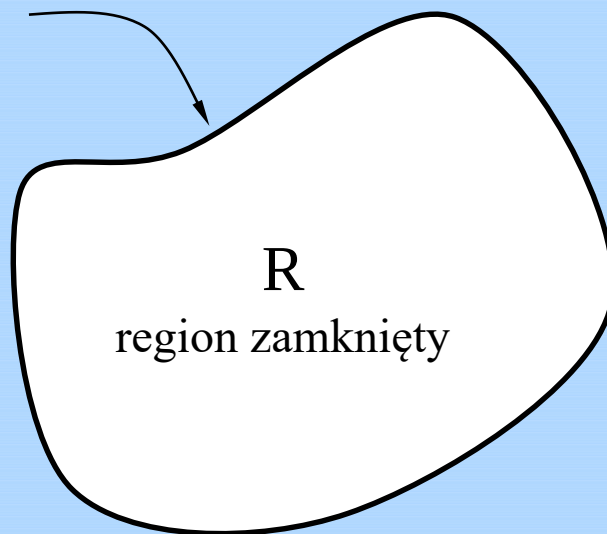
$$\text{Laplace'a} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad \nabla^2 \Phi = 0$$

$$\text{Poisson'a} \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = g(x, y) \quad \nabla^2 \Phi = g(x, y)$$

w których $a = c = 1$, $b = 0$

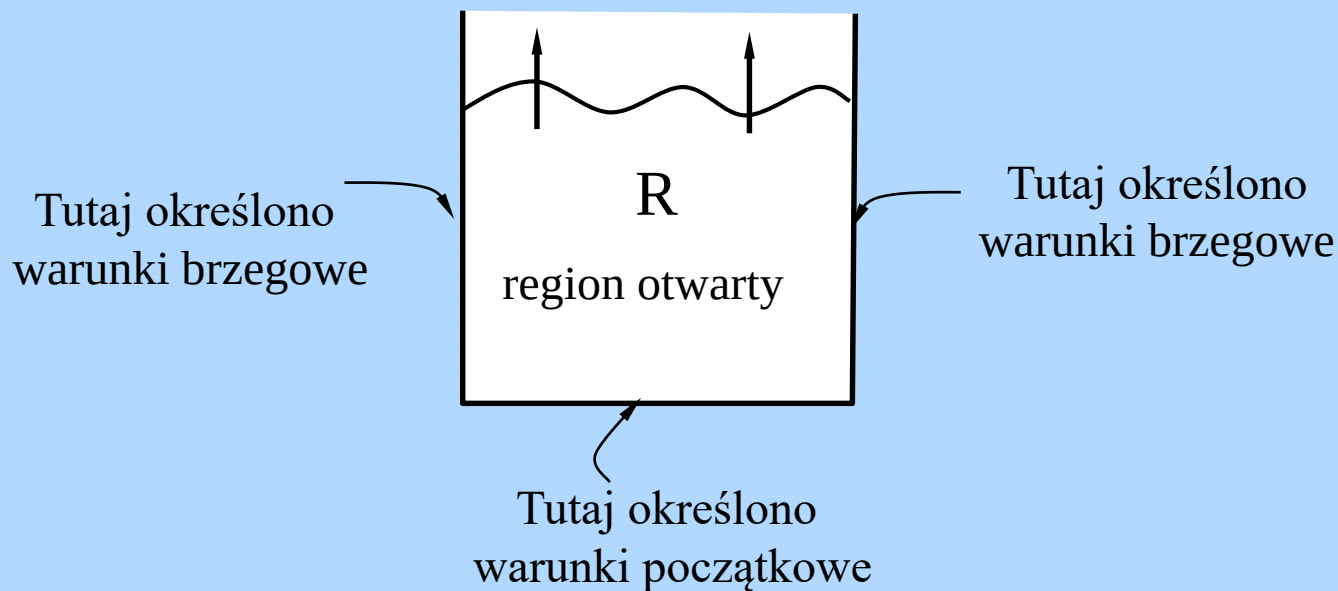
Równanie eliptyczne zwykle modeluje problem wewnętrzny, więc region rozwiązania jest zamknięty lub ograniczony.

Tutaj określone
warunki brzegowe



Równania hiperboliczne pojawiają się w problemach propagacji. Region rozwiązania zwykle jest otwarty, tak żeby rozwiązanie rozwijało się na zewnątrz do nieskończoności począwszy od warunków początkowych, tak długo jak długo są spełnione warunki brzegowe.

Rozwiązanie rozprzestrzenia się w $\mathbf{R}$



Typowym przykładem równania hiperbolicznego jest jednowymiarowe równanie falowe w dielektryku.

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

gdzie: $a = u^2$, $b = 0$, $c = -1$.

Nie jest równaniem hiperbolicznym równanie falowe dla pól harmoniczných. W równaniu tym wyeliminowana jest zależność od czasu i równanie staje się eliptycznym.

Równanie paraboliczne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = k \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad a = 1, b = c = 0$$

spełnia np. temperatura w środowisku przewodzącym. Jest to więc równanie przewodnictwa. Równanie paraboliczne spełniają także składowe $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ fali elektromagnetycznej w przewodnikach. Równaniem parabolicznym jest również równanie dyfuzji (zarówno pola jak i roztworów).

Region rozwiązania równania parabolicznego jest zazwyczaj otwarty. Z równaniem związane są warunki początkowe i brzegowe, podobnie jak z równaniem hiperbolicznym.

Jednakże do rozwiązania wystarcza jeden warunek początkowy dla czasu $t = 0$, ponieważ równanie jest rzędu pierwszego względem czasu.

Równania paraboliczne i hiperboliczne są rozwiązywane podobnymi technikami. Rozwiązanie równań eliptycznych jest zazwyczaj trudniejsze i wymaga odmiennych technik.

Poszczególne rozważane typy równań mogą być skalarne lub wektorowe, jednorodne bądź niejednorodne.

Ponieważ współczynniki a , b i c są ogólnie funkcjami x i y więc zaklasyfikowanie równania może się zmieniać w różnych obszarach regionu rozwiązania.

Równania z większą od dwóch liczbą niezależnych zmiennych ($x, y, z, t, \dots$) mogą nie odpowiadać ściśle przedstawionej klasyfikacji.

Klasyfikacja równań różniczkowych o pochodnych cząstkowych (PDE)

Typ	Znak	Przykład równania	Region rozwiązania
Eliptyczne	$b^2 - 4ac < 0$	Laplace'a $\Phi_{xx} + \Phi_{yy} = 0$	Zamknięty
Hiperboliczne	$b^2 - 4ac > 0$	Falowe $u^2 \Phi_{xx} = \Phi_{tt}$	Otwarty
Paraboliczne	$b^2 - 4ac = 0$	Dyfuzji $\Phi_{xx} = k \Phi_t$	Otwarty

Typy problemów reprezentowane przez równanie

$$L\Phi = g$$

nazywa się deterministycznymi, ponieważ wielkość szukana może być wyznaczona bezpośrednio.

Inne typy problemów gdzie wielkość szukana nie jest znajdowana bezpośrednio, nazywa się niedeterministycznymi lub zagadnieniami znajdowania wartości własnych.

Standardowe zagadnienie znajdowania wartości własnych ma postać:

$$L\Phi = \lambda\Phi$$

gdzie funkcja źródła g zastąpiona jest przez $\lambda\Phi$

Najbardziej ogólne jest uogólnione zagadnienie znajdowania wartości własnych, które ma postać:

$$L\Phi = \lambda M\Phi$$

w którym:

M podobnie jak L jest liniowym operatorem problemu EM.

W obu powyższych równaniach tylko pewne szczególne wartości λ zwane wartościami własnymi, są dozwolone. Z tymi wartościami związane są odpowiednie rozwiązania Φ nazywane funkcjami własnymi.

Problemy wartości własnych są zwykle spotykane w zagadnieniach wibracji i falowodach, gdzie wartości własne λ odpowiadają fizycznym wielkościom np. częstotliwości rezonansu.

Klasyfikacja warunków granicznych

Warunki graniczne dzieli się na brzegowe (na powierzchni lub linii granicznej) i początkowe (dla czasu $t = t_0$).

Rozwiązanie problemu polega na znalezieniu nieznanej funkcji Φ z równania różniczkowego o pochodnych cząstkowych. Φ musi spełniać równanie

$$L\Phi = g$$

wewnątrz określonego regionu rozwiązania $\mathbf{R}$, a ponadto spełniać pewne warunki na granicy regionu $\mathbf{R}$.

Zwykle warunki te są typu Dirichlet'a lub Neumann'a. Gdy na granicy obowiązują oba typy warunków to mówimy o warunkach mieszanych.

Warunki jednorodne

Warunek brzegowy Dirichlet'a

$$\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \text{ na granicy } S$$

Warunek brzegowy Neumann'a

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = 0 \quad \mathbf{r} \text{ na granicy } S$$

tzn. normalna pochodna Φ zanikająca na S .

Mieszany warunek brzegowy

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = 0 \quad \mathbf{r} \text{ na granicy } S$$

$h(\mathbf{r})$ jest znaną funkcją, a $\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n}$ jest pochodną kierunkową

Φ wzdłuż zewnętrznej normalnej do granicy S . Znaczy to, że

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = \nabla \Phi(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{a}_n$$

$\mathbf{a}_n$ – wektor jednostkowy skierowany na zewnątrz R .

Warunek brzegowy Neumann'a jest szczególnym przypadkiem mieszanego warunku brzegowego, gdy $h(\mathbf{r}) = 0$.

Wymienione dotychczas warunki zwane są warunkami homogenicznymi (jednorodnymi).

Ogólniejsze są warunki niejednorodne (niehomogeniczne).

Warunek brzegowy Dirichlet'a

$$\Phi(\mathbf{r}) = p(\mathbf{r})$$

Warunek brzegowy Neumann'a

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} = q(\mathbf{r})$$

Mieszany warunek brzegowy

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r})}{\partial n} + h(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) = w(\mathbf{r})$$

gdzie $p(\mathbf{r})$, $q(\mathbf{r})$, and $w(\mathbf{r})$ są znanymi funkcjami na powierzchni S .

Przykłady

$\Phi(0) = 1$ jest niejednorodnym warunkiem Dirichlet'a

$\Phi(0) = 0$ jest jednorodnym warunkiem Dirichlet'a

$\Phi'(1) = 2$ jest niejednorodnym warunkiem Neumann'a

$\Phi'(1) = 0$ jest jednorodnym warunkiem Neumann'a

W elektrostatyce, jeśli na powierzchni S jest określona wartość potencjału, to formułuje się warunek brzegowy Dirichlet'a, zaś jeśli na tej powierzchni znamy ładunek powierzchniowy

$$\rho_S = D_n = \varepsilon \frac{\partial V}{\partial n}$$

to formułuje się warunek brzegowy Neumann'a.

Problem znajdowania funkcji Φ , która jest harmoniczna w regionie $\mathbf{R}$ nazywamy zagadnieniem Dirichlet'a, jeżeli Φ jest określone na granicach regionu.

Problem nazywamy zagadnieniem Neumann'a, jeżeli na granicach regionu jest określona pochodna

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n}$$

Warto zauważyć, że trzy różne obiekty określane są terminem jednorodny:

region, jeżeli σ, ε, μ nie są funkcjami zmiennych przestrzennych,
równanie, jeżeli $g = 0$,

warunek brzegowy, jeśli $p(\mathbf{r}), q(\mathbf{r}), w(\mathbf{r}) = 0$

Zasada superpozycji

Jeżeli każdy element zbioru funkcji n , $n = 1, 2, \dots, N$, jest rozwiązaniem równania różniczkowego $L\Phi = 0$ z pewnymi warunkami brzegowymi, to liniowa kombinacja

$$\Phi_N = \Phi_0 + \sum_{n=1}^N a_n \Phi_n$$

spełnia również równanie $L\Phi = g$.

Przykład

Problem liniowy $\mathbf{L}\Phi = g$ z N w.b. $M_i(s) = h_i \quad i = 1 \dots N$

Można podzielić na serie następujących podproblemów:

$$\begin{array}{cccc} L\Phi_0 = g & L\Phi_1 = 0 & \dots & L\Phi_N = 0 \\ M_1(s) = 0 & M_1(s) = h_1 & \dots & M_1(s) = 0 \\ M_2(s) = 0 & M_2(s) = 0 & \dots & M_2(s) = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ M_N(s) = 0 & M_N(s) = 0 & \dots & M_N(s) = h_N \end{array}$$

gdzie $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_N$ są rozwiązaniami problemów zredukowanych, zwykle łatwiejszych do rozwiązania niż problem oryginalny.

Rozwiązaniem problemu oryginalnego jest ich suma

$$\Phi = \sum_{n=0}^N \Phi_n$$

Twierdzenie o jednoznaczności

Gwarantuje ono, że rozwiązanie uzyskane dla PDE z określonymi warunkami granicznymi jest jedynym możliwym.

Dla problemów EM twierdzenie to może być wyrażone następująco:
Jeżeli znalezione w jakikolwiek sposób pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ spełniają jednocześnie równania Maxwell'a i określone warunki brzegowe to rozwiązanie takie jest jednoznaczne.

Dowód można przeprowadzić zakładając istnienie dwóch rozwiązań $\mathbf{E}_{1,2}$ oraz $\mathbf{H}_{1,2}$ i badając ich różnice $\Delta\mathbf{E}$ i $\Delta\mathbf{H}$.
Z twierdzenia Poynting'a i warunków na granicy wynika, że jeżeli $\Delta\mathbf{E}$ i $\Delta\mathbf{H} = 0$, to $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2$ i $\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$ tzn. rozwiązania są jednoznaczne.

Dla elektrostatyki (potencjał V):

Rozwiązanie $\nabla^2 V = 0$ jest jednoznacznie określone przez określenie wartości V lub składowej normalnej ∇V w każdym punkcie powierzchni granicznej.

Dla magnetostatyki (potencjał $\mathbf{A}$):

Rozwiązanie $\nabla^2 \mathbf{A} = 0$ (i $\nabla \mathbf{A} = 0$) jest jednoznacznie określone przez sprecyzowanie wartości $\mathbf{A}$ lub składowej stycznej $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ w każdym punkcie powierzchni granicznej.

Inne twierdzenia o jednoznaczności

Jeżeli dla danej chwili $t = t_0$ znane są natężenia pola $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ w dowolnym punkcie obszaru ograniczonego pewną powierzchnią, to za pomocą równań Maxwell'a można obliczyć wszystkie wielkości elektromagnetyczne w dowolnej chwili t . Zakłada się przy tym, że znane są składowe styczne $\mathbf{E}$ i $\mathbf{H}$ w każdym punkcie powierzchni ograniczającej od chwili początkowej t_0 do chwili t .

Pole wektorowe jest jednoznacznie określone jeśli dane są w badanym obszarze $\operatorname{div} \mathbf{A}$, $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ oraz $(\partial \mathbf{A} / \partial n)_S$ lub $(\mathbf{A})_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ lub $A \propto 1/r^2$

Twierdzeniami o jednoznaczności odnoszącymi się do różnych pól są również zagadnienia Dirichlet'a, Neumann'a i mieszane.

Twierdzenia o jednoznaczności są w zasadzie dowiedzione dla przypadku stałych wartości γ , μ , ε . W przypadku środowisk nieliniowych i anizotropowych jednoznaczność rozwiązań nie została udowodniona.

Metody analityczne (metody numeryczne dokładne)

Najbardziej zadowalającym rozwiązaniem problemu polowego jest rozwiązanie analityczne.

W większości praktycznych przypadków nie można uzyskać takiego rozwiązania i zachodzi konieczność posłużenia się rozwiązaniem przybliżonym.

Znaczenie rozwiązania analitycznego polega głównie na tym, że można nim sprawdzić jakość metody numerycznej użytej do rozwiązania przybliżonego.

Metody analityczne najczęściej stosowane w rozwiązywaniu problemów EM

metoda rozdzielenia zmiennych (Fourier'a)

odbić zwierciadlanych

metoda odwzorowań konforemnych (wiernokątnych)

metoda superpozycji potencjału magnetycznego

metody całkowe

Metoda rozdzielania zmiennych

Metoda rozdzielania zmiennych polega na zastąpieniu funkcji dwóch lub trzech zmiennych przez iloczyn lub sumę iloczynów funkcji zależnych tylko od jednej zmiennej:

$$H_{mx}(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$$

Zróżniczkowanie takiego równania i podstawienie do np. równania falowego prowadzi do trzech równań różniczkowych rzędu drugiego o współczynnikach stałych. Każde z tych równań zależy tylko od jednej zmiennej. Rozwiązując te równania znajduje się funkcje X , Y , Z , które podstawia się następnie do równania wyjściowego. Wykorzystując warunki na granicy środowisk znajduje się stałe całkowania i ostateczne rozwiązanie problemu.

Równanie falowe w metalu w układzie kartezjańskim

Równanie skalarne dla składowej x

$$\frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 H_{mx}}{\partial z^2} = a^2 H_{mx}$$

$$H_{mx}(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n X_n(x) Y_n(y) Z_n(z)$$

Różniczkując H_{mx} i dzieląc przez $X_n Y_n Z_n$ otrzymuje się

$$X_n'' Y_n Z_n + X_n Y_n'' Z_n + X_n Y_n Z_n'' = \alpha^2 X_n Y_n Z_n$$

$$\frac{X_n''}{X_n} + \frac{Y_n''}{Y_n} + \frac{Z_n''}{Z_n} - \alpha^2 = 0$$

Poszczególne składniki równania zależą tylko od jednej zmiennej i spełniają równanie tylko wtedy gdy są stałe.

$$\frac{X_n''}{X_n} = A_n \quad \frac{Y_n''}{Y_n} = B_n \quad \frac{Z_n'' - \alpha^2 Z_n}{Z_n} = -A_n - B_n \quad n=1, 2, \dots, \infty$$

co daje trzy równania różniczkowe liniowe rzędu drugiego

$$X_n''(x) - A_n X_n(x) = 0 \quad Y_n''(y) - B_n Y_n(y) = 0$$

$$Z_n''(z) - (\alpha^2 - A_n - B_n) Z_n(z) = 0$$

podstawiając $A_n = -\beta_n^2$ $B_n = -\eta_n^2$ otrzyma się

$$X_n(x) = C_{1n} \cos \beta_n x + C_{2n} \sin \beta_n x = C_{3n} \sin(\beta_n x + \varphi_n)$$

$$Y_n(y) = C_{4n} \cos \eta_n y + C_{5n} \sin \eta_n y = C_{6n} \sin(\eta_n y + \psi_n)$$

$$Z_n(z) = C_{7n} e^{-z\sqrt{\alpha^2 + \beta_n^2 + \eta_n^2}} + C_{8n} e^{z\sqrt{\alpha^2 + \beta_n^2 + \eta_n^2}}$$

Podstawiając te wyrażenia do wyjściowej funkcji i eliminując niepotrzebne stałe znajduje się ostateczne rozwiązanie.

Żadna z wielkości pola nie może wzrastać do nieskończoności przy wzroście odległości. Dlatego $C_{8n} = 0$. Pozostałe stałe wyznacza się z warunków na powierzchniach granicznych badanego obszaru.

Rozwiązanie takie dotyczy również równania Laplace'a ($\nabla^2 V = 0$), jeżeli podstawić $\alpha = 0$.

Równanie falowe we współrzędnych cylindrycznych

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_r \left(\nabla^2 E_{mr} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_{m\varphi}}{\partial \varphi} - \frac{E_{mr}}{r^2} \right) + \mathbf{1}_\varphi \left(\nabla^2 E_{m\varphi} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial E_{mr}}{\partial \varphi} - \frac{E_{m\varphi}}{r^2} \right) + \mathbf{1}_z \nabla^2 E_{mz} = \\ = \Gamma^2 (\mathbf{1}_r E_{mr} + \mathbf{1}_\varphi E_{m\varphi} + \mathbf{1}_z E_{mz}) \end{aligned}$$

$$\Gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}$$

We współrzędnych cylindrycznych nie można wyodrębnić oddzielnych równań skalarnych dla poszczególnych składowych pola. Jednak w wielu przypadkach praktycznych można przyjąć, że istnieje symetria osiowa wektorów pola tzn.

$$\frac{\partial E_m}{\partial \varphi} = 0$$

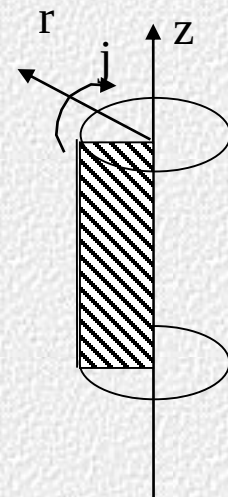
wówczas otrzymuje się quasi-trójwymiarowy układ równań skalarnych

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 E_{mr}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{mr}}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_{mr}}{\partial z^2} - \frac{E_{mr}}{r^2} &= \Gamma^2 E_{mr} \\ \frac{\partial^2 E_{m\varphi}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{m\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_{m\varphi}}{\partial z^2} - \frac{E_{m\varphi}}{r^2} &= \Gamma^2 E_{m\varphi} \\ \frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial E_{mz}}{\partial r} + \frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial z^2} &= \Gamma^2 E_{mz}\end{aligned}$$

Rozwiązuje się je przy pomocy podstawienia

$$E_{mr}(r, z) = R(r) \cdot Z(z)$$

i postępowania analogicznego jak w układzie kartezjańskim.



Zakładając zależność pola od jednej zmiennej (r) tzn. przyjmując

$$\frac{\partial E_m}{\partial z} = 0$$

otrzymuje się dwa typy równań Bessela

$$\frac{\partial^2 E_{mr}}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial E_{mr}}{\partial p} + \left(1 - \frac{1}{p^2}\right) E_{mr} = 0$$

dla E_{mr} i E_{mj}

$$\frac{\partial^2 E_{mz}}{\partial p^2} + \frac{1}{p} \frac{\partial E_{mz}}{\partial p} + E_{mz} = 0$$

dla E_{mz}

Rozwiązania ogólne mogą mieć postać

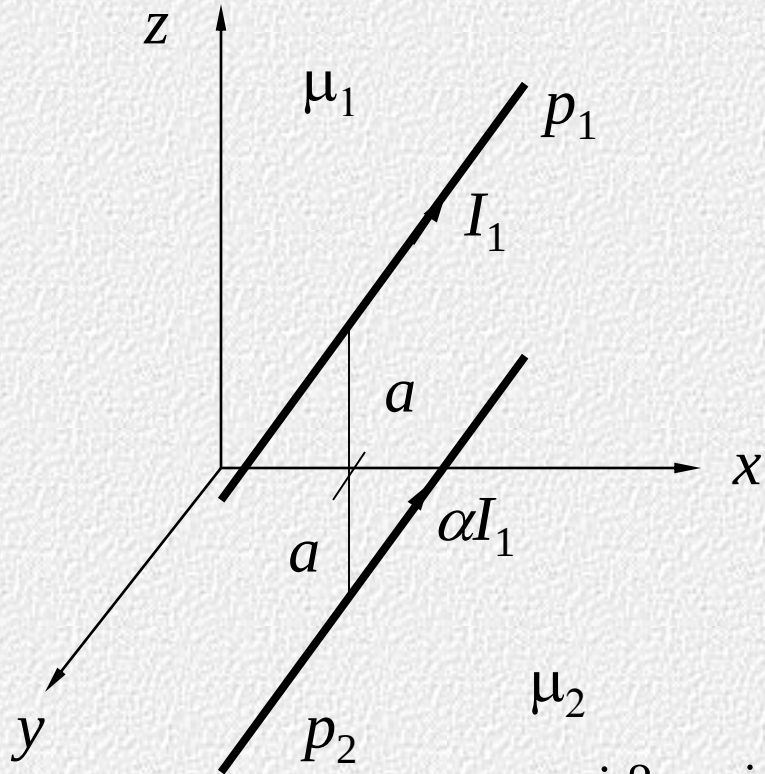
$$\begin{aligned} E_{mr} &= C_1 \cdot I_1(p) + C_2 \cdot iN_1(p) \\ E_{mz} &= C_3 \cdot I_0(p) + C_4 \cdot iN_0(p) \end{aligned}$$

$$I_n(p) = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{p}{2}\right)^{n+2k}$$

gdzie $I(p)$, $N(p)$ – funkcje Bessela pierwszego i drugiego rodzaju

Metoda odbić zwierciadlanych

Dotyczy pola magnetostaticznego lub elektrostatycznego w obszarze o różnych ale stałych parametrach materiałowych.



W środowisku 1 równoległe do powierzchni $z=0$ biegnie przewód p_1 z prądem stałym I_1 . W obliczeniach pola w obszarze 1 zakłada się, że w całej przestrzeni $\mu_1 = \text{const}$ i dodatkowy przewód p_2 z prądem αI_1 ułożony symetrycznie względem usuniętej powierzchni granicznej.

W obliczeniach pola w obszarze 2 zakłada się, że w całej przestrzeni $\mu_2 = \text{const}$ i tylko przewód p_1 z prądem βI_1 .

α i β znajduje się z warunków na granicy środowisk

$$B_{2n} = B_{1n} \quad H_{2t} = H_{1t}$$

$$\alpha = \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_2 + \mu_1} \quad \beta = \frac{2\mu_1}{\mu_2 + \mu_1}$$

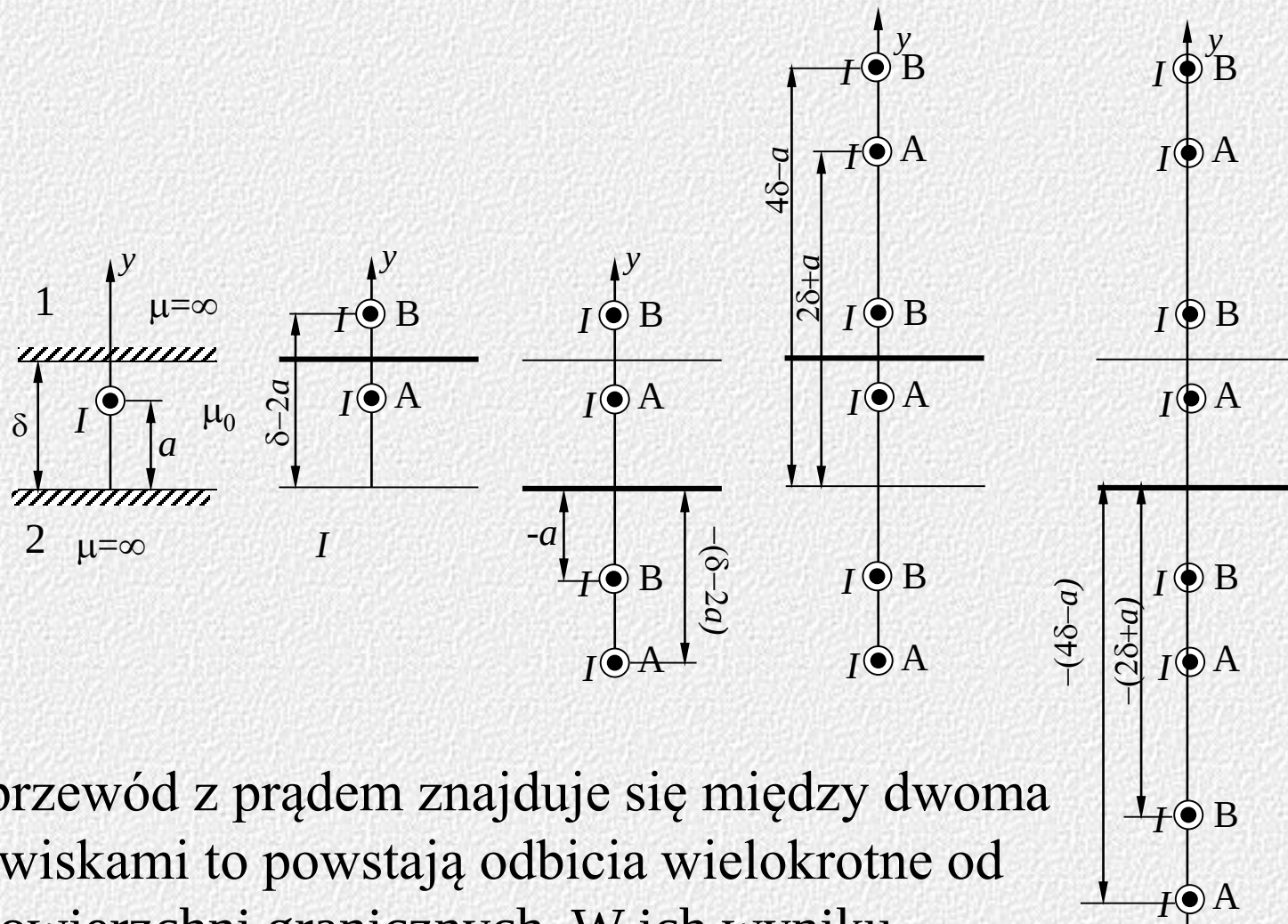
gdy

$$\mu_2 \rightarrow \infty \quad \alpha = 1 \quad \beta = 0$$

Pole w obszarze 2 nie występuje, powierzchnia $z = 0$ jest ekwipotencjalna i odbicie zwierciadlane jest idealne.

Dla dowolnego układu prądów w środowisku liniowym można zastosować ogólne rozwiązanie dla potencjału wektorowego.

$$\mathbf{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \int_L \frac{1}{r} d\mathbf{l}$$



Gdy przewód z prądem znajduje się między dwoma środowiskami to powstają odbicia wielokrotne od obu powierzchni granicznych. W ich wyniku otrzymuje się nieskończone ciągi przewodów z prądem I w obszarze o przenikalności μ_0 .

Metoda odwzorowań konforemnych (zmienne zespolone)

Zespolony potencjał skalarny i wektorowy

$$V_k = V_m + i\Psi_V \quad A_k = A_z + iV_B$$
$$A_k = i\mu V_k$$

Jeżeli założyć

$$V_k(z) = u(x; y) + iv(x; y)$$

to każdemu punktowi $z = x + iy$ ze zbioru Z przyporządkowuje się punkt (lub kilka punktów) $w = u + iv$ ze zbioru W (odwzorowanie Z na W). Jeśli $w = f(z)$ jest różniczkowalna, to wyrażone nią odwzorowanie ma następującą własność: dwie linie przecinające się w Z pod kątem α przekształcają się w linie przecinające się w W pod takim samym kątem. Odwzorowanie takie nazywa się wiernokątnym lub konforemnym.

Twierdzenie:

jeżeli w obszarze W zadana jest funkcja $V_k(w)$ zmiennej zespolonej $w = u+iv$ spełniająca równanie Laplace'a, oraz jeśli istnieje funkcja $w(z) = u(x;y) + iv(x;y)$ odwzorowująca Z na W , to $V_k(z)$ przedstawia potencjał zespolony w obszarze Z .

Metoda odwzorowań konforemnych polega na znalezieniu takiej funkcji $f(z)$, która złożony układ zadany, przekształca w układ prostszy, w którym obliczenie pola magnetycznego nie nastręcza trudności.

Etapy rozwiązania:

- znajduje się funkcję $w=f(z)$ odwzorowującą zadany układ na płaszczyźnie Z w układ prostszy na płaszczyźnie W ,
- na liniach granicznych układów przypisuje się zadane wartości potencjału,
- w układzie W znajduje się funkcję potencjału zespolonego $V_k(w)$ i oblicza poszukiwane wielkości np. strumień magnetyczny,
- za pomocą funkcji $w=f(z)$ transformuje się otrzymane wyniki do pola na płaszczyźnie Z .

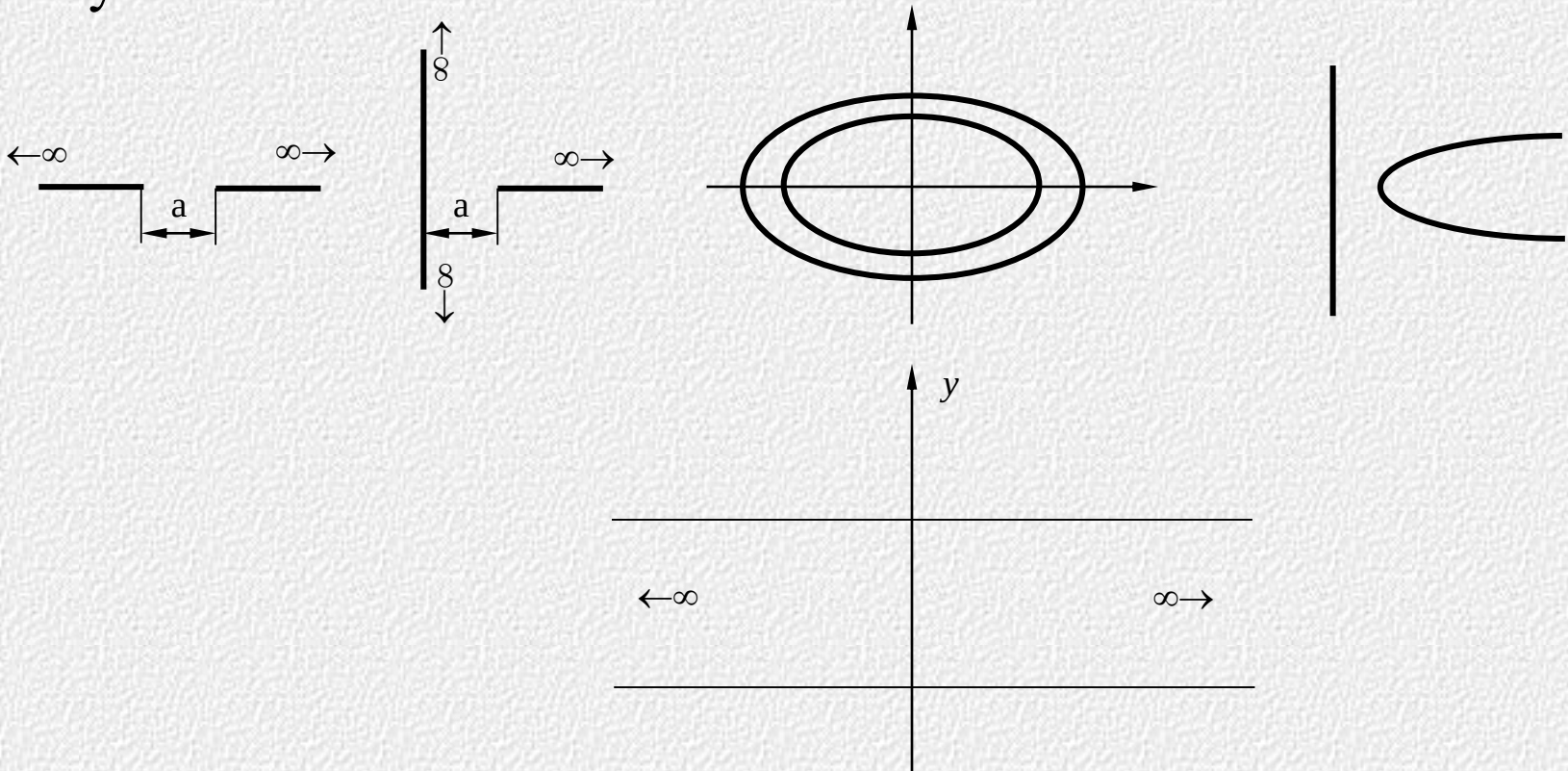
Przykład: funkcja $w = \sin z$

$$w = \sin z = \sin(x + iy) = \sin x \cosh y + i \cos x \sinh y$$

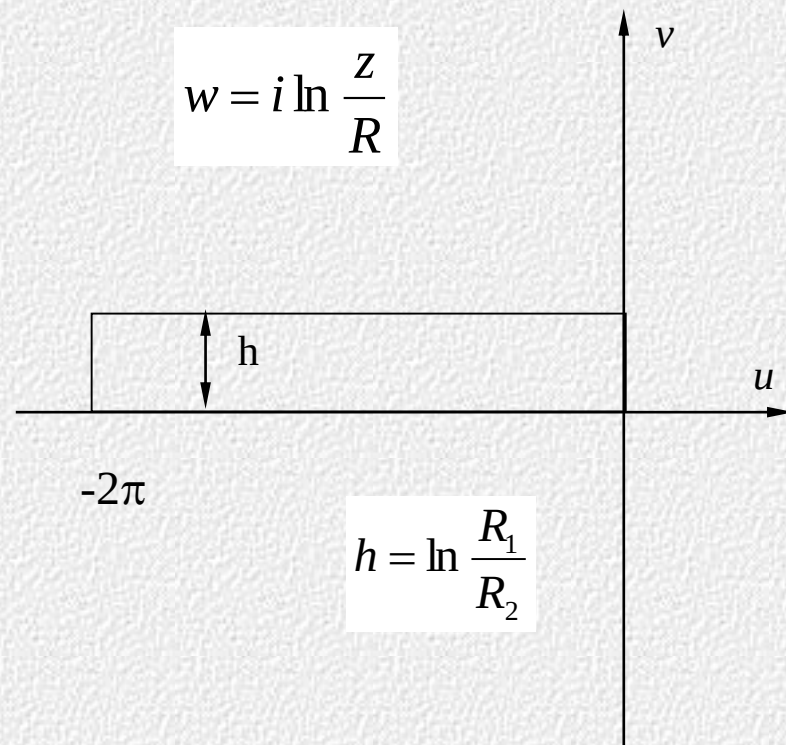
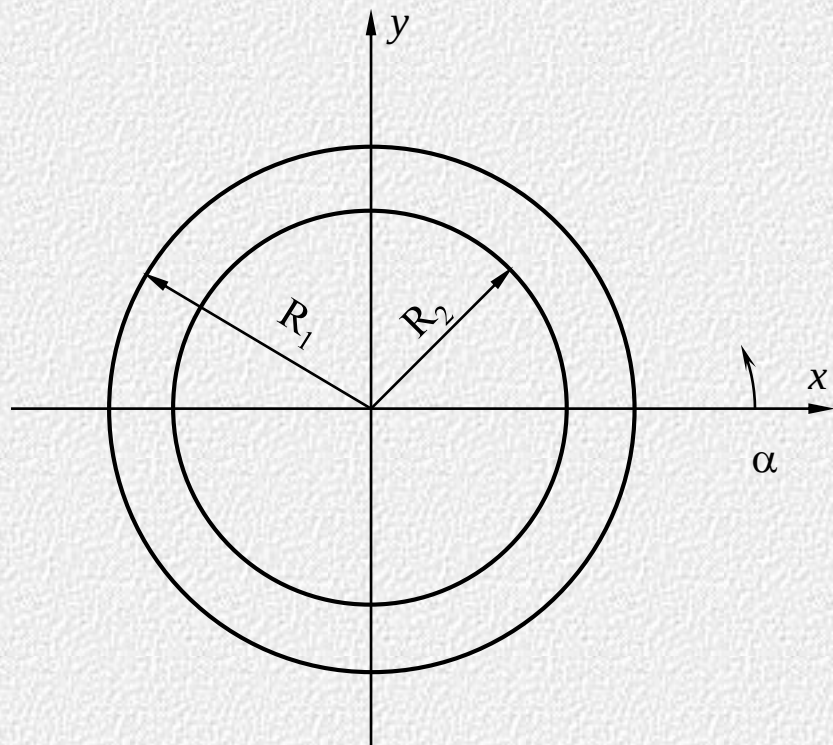
$$u = \sin x \cosh y$$

$$v = \cos x \sinh y$$

Układy przekształcane przez $w = \sin z$ w pasmo między dwiema płaszczyznami:



Przekształcenie pierścienia na pasmo



Podstawiając

otrzymuje się

$$z = re^{i\alpha}$$

$$w = i \ln \frac{r}{R} e^{i\alpha} = -\alpha + i \ln \frac{r}{R} \quad 0 \leq \alpha < 2\pi \quad R_2 \leq r \leq R_1$$

Np. $R_{pasma} = \rho \frac{h}{2\pi R_2}$

$$R_{pierscienia} = \frac{\rho}{2\pi R_2} \ln \frac{R_1}{R_2}$$

Metoda równań całkowych

Gdy nieznane są warunki na granicy środowisk, gdyż ich ostateczny opis zależy od odpowiedzi środowiska na znane pierwotne pole wymuszające, obliczenia wykonuje się zazwyczaj metodą równań całkowych.

Zagadnienie sprowadza się do równania całkowego Fredholma rzędu drugiego o postaci:

$$y(x) = g(x) + \lambda \int_a^b K(x, s) \cdot y(s) \cdot ds$$

gdzie: $y(x)$ - funkcja poszukiwana,

$g(x)$ - funkcja dana,

$K(x, s)$ - jądro równania całkowego,

λ - parametr liczbowy, rzeczywisty lub zespolony.

$$a \leq x \leq b$$

$$a \leq s \leq b$$

Jeżeli spełnione są warunki:

$g(x)$ jest całkowalne w (a,b)

$\max [K(x, s)] \leq 1/[\lambda (b-a)]$

$a \leq x, s \leq b$

to równanie całkowe ma jedno i tylko jedno rozwiązanie w przedziale (a,b) w postaci sumy jednostajnie zbieżnego szeregu Neumana:

$$y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i g_i(x)$$

gdzie:

$$g_0 = g(x) \quad g_i(x) = \int_a^b K(x, s) g_{i-1}(s) \cdot ds$$

Rozwiązanie zagadnienia metodą sum skończonych polega na zastąpieniu całki w równaniu całkowym odpowiednią sumą, posługując się dowolnym wzorem całkowania numerycznego np.:

$$\int_a^b \varphi(x) \cdot dx = \sum_{k=1}^{k=n} A_k \varphi(x_k) + \rho(\varphi)$$

Następnie równanie całkowe sprowadza się do układu równań algebraicznych liniowych:

$$y(x_i) = g(x_i) + \lambda \sum_{k=1}^n A_k \cdot K(x_i, x_k) \cdot y(x_k) + \lambda \rho_i$$
$$i = 1, 2, 3 \dots n$$

Wartość nieznaną $\lambda \rho_i$ odrzuca się i otrzymuje rozwiązanie w postaci liczb $y(x_i)$ w punktach węzłowych x_i .

Przybliżone metody wariacyjne

Podstawowym zagadnieniem rachunku wariacyjnego jest wyznaczenie takich niewiadomych funkcji $u_i(x, y)$ (*ekstremali*), żeby całka I pewnej kombinacji tych funkcji i ich pochodnych przybierała wartość ekstremalną.

Całka I nazywana jest *funkcjonałem*.

Największe znaczenie praktyczne ma funkcjonał typu:

$$I = \iint_{\Omega} F(u, u_x, u_y, x, y) \cdot dx dy$$

gdzie:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

zaś poszukiwana funkcja $u(x, y)$ jest ciągła wraz ze swoimi pochodnymi w obszarze Ω i przybiera na granicy C obszaru zadane wartości.

Rozwiązaniem zagadnienia wariacyjnego

$$I = \iint_{\Omega} F(u, u_x, u_y, x, y) \cdot dx dy = \min$$

jest równanie Eulera.

Do bezpośredniego znajdowania ekstremum funkcjonału stosuje się przybliżoną metodę Ritza oraz jej rozwinięcia, Kantorowicza i Galerkina. W metodach tych omija się rozwiązywanie równań różniczkowych przez poszukiwanie kombinacji liniowych ciągu funkcji, które od razu ekstremalizują funkcjonał.

Celem metody Ritza jest znalezienie takiego zbioru kombinacji liniowych

$$u(x, y) = \varphi_0(x, y) + \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x, y)$$

i dowolnie dobranego ciągu liniowo niezależnych w przedziale $(0, C)$ funkcji

$$\varphi_0(x, y), \varphi_1(x, y), \varphi_2(x, y), \dots$$

aby funkcja u realizowała minimum funkcjonału. Funkcja spełnia przy tym warunki brzegowe zadane dla funkcji u pozostałe funkcje przybierają wartości zerowe na granicy C obszaru Ω .

Zagadnienie sprowadza się więc do wyznaczenia n współczynników

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

ekstremalizujących funkcjonał, wyrażony jako funkcja tych współczynników

$$I = I(a_1, a_2, \dots, a_n)$$

Współczynniki a_k wyznaczamy z warunku istnienia ekstremum funkcjonału I

$$\frac{\partial I}{\partial a_k} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

Wyrażenie stanowi układ n równań o n niewiadomych.

Metody różnicowe

Metody analityczne mogą zawieść jeżeli:

- PDE jest nieliniowe i nie może być linearyzowane bez poważnego wpływu na wynik,
- region rozwiązania jest złożony
- warunki brzegowe są mieszanych typów
- warunki graniczne są zależne od czasu
- ośrodek jest niejednorodny albo anizotropowy
- inne komplikacje

Problemy o takiej złożoności mogą być rozwiązywane numerycznie.

Spośród metod numerycznych dostępnych dla rozwiązywania PDE, metody korzystające z różnic skończonych są najbardziej zrozumiałe, najczęściej używane i najbardziej uniwersalne.

Metoda różnic skończonych została zaproponowana przez A. Thom'a w latach dwudziestych XX wieku, pod nazwą „metoda kwadratów”, dla rozwiązania nieliniowego równania hydrodynamicznego.

Od tego czasu, metoda znalazła zastosowania w rozwiązywaniu różnych problemów polowych.

Techniki różnic skończonych oparte są na przybliżeniach, które pozwalają na zastąpienie równania różniczkowego przez równania różnic skończonych. Te przybliżenia mają formę algebraiczną, wiążą wartość zmiennej zależnej w punkcie regionu rozwiązania z wartościami w kilku sąsiednich punktach.

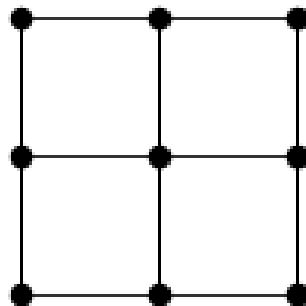
Rozwiązanie problemu metodą różnic skończonych zamyka się w trzech krokach:

- (1) podzielenie regionu rozwiązania na siatkę węzłów,
- (2) przybliżenie danego równania różniczkowego przez równoważne równanie różnicowe, co opowiada zależności zmiennej zależnej w punkcie regionu rozwiązania od jej wartości w punktach sąsiednich,
- (3) rozwiązywanie równań różnicowych podlegających określonym warunkom brzegowym i/lub warunkom początkowym.

Szczegółowy sposób postępowania jest podyktowany przez naturę rozwiązywanego problemu, region rozwiązania , i warunki brzegowe.

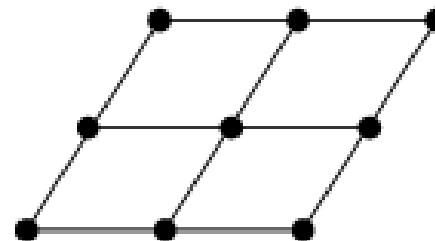
Najczęściej używane wzory siatki dla problemów dwuwymiarowych

(a) prostokątna,



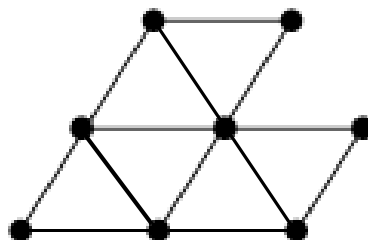
(a)

(b) skośna,



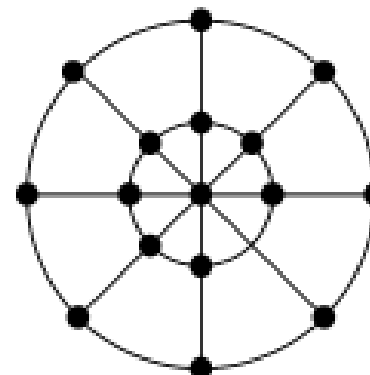
(b)

(c) trójkątna,



(c)

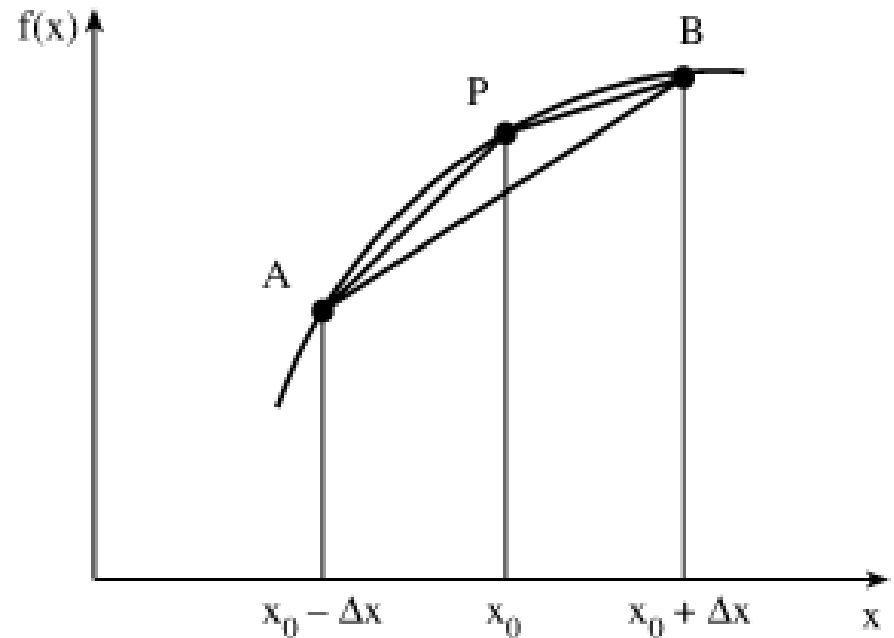
(d) kołowa.



(d)

Konstrukcja przybliżenia (aproksymacji) danego równania różniczkowego różnicami skończonymi.

Dla danej funkcji $f(x)$ można aproksymować jej pochodną (nachylenie, lub jego tangens) w punkcie P przez nachylenie łuku PB dane przez formułę:



progresywnej różnicy funkcji

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

wstecznej (regresywnej)
różnicy funkcji

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 + \Delta x)}{\Delta x}$$

centralnej różnicy funkcji

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$$

Drugą pochodną $f(x)$ w punkcie P można aproksymować jako:

$$\begin{aligned} f''(x_0) &\approx \frac{f'\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right) - f'\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \frac{f(x_0) - f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x} \right] = \\ &= \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2} \end{aligned}$$

Jakiegokolwiek przybliżenie wartości pochodnej przez dyskretny układ punktów nazywa się przybliżeniem różnicy skończonej.

Taka interpretacja różnic skończonych jest raczej intuicyjna.

Bardziej ogólne wyrażenie można uzyskać z rozwinięcia funkcji w szereg Taylor'a.

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} \Delta x^2 f''(x_0) + \frac{1}{3!} \Delta x^3 f'''(x_0) + \dots$$

$$f(x_0 - \Delta x) = f(x_0) - \Delta x f'(x_0) + \frac{1}{2!} \Delta x^2 f''(x_0) - \frac{1}{3!} \Delta x^3 f'''(x_0) + \dots$$

Dodając te równania stronami otrzymamy:

$$f(x_0 + \Delta x) + f(x_0 - \Delta x) = 2f(x_0) + \Delta x^2 f''(x_0) + O\Delta x^4 + \dots$$

gdzie $O(\Delta x)^4$ jest błędem wprowadzonym przez obcięcie szeregu. Mówi się, że błąd ten jest rzędu $(\Delta x)^4$ lub po prostu $O(\Delta x)^4$. Co oznacza, że $O(\Delta x)^4$ jest nie większy niż $(\Delta x)^4$. Zakładając, że błąd ten jest pomijalny otrzyma się:

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \Delta x) - 2f(x_0) + f(x_0 - \Delta x)}{\Delta x^2}$$

Jest to wynik identyczny jak dla rozważań intuicyjnych.

Odejmując rozwinięcia funkcji w szeregi, i pomijając wyrażenia rzędu $(\Delta x)^3$ otrzyma się wzór na pierwszą pochodną jak dla różnicy centralnej.

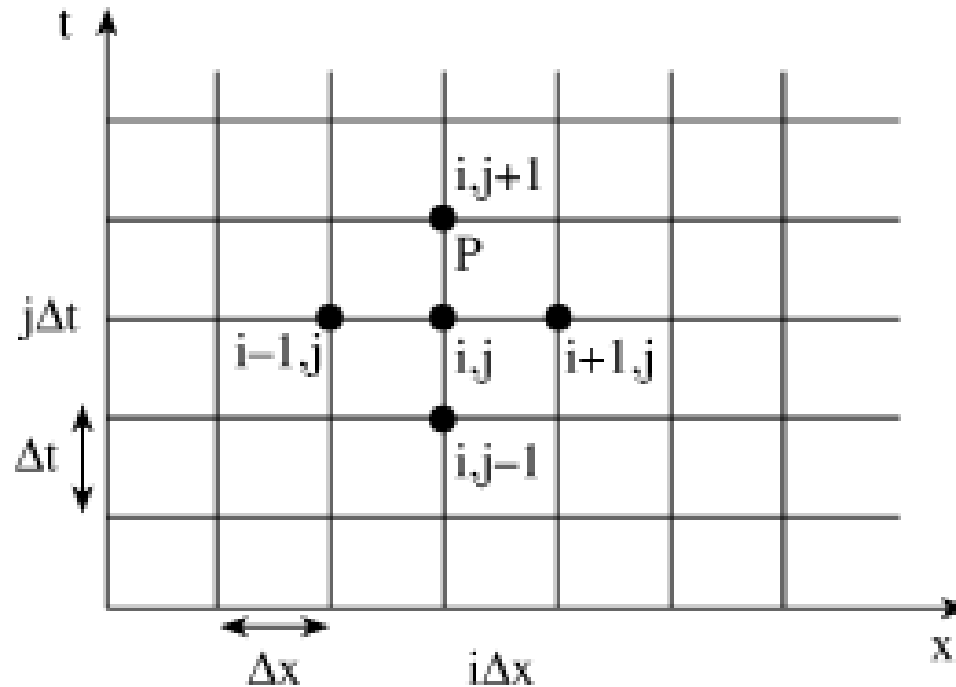
Wyższe rzędy aproksymacji uzyskuje się przez uwzględnienie większej liczby elementów szeregu.

Nieskończona liczba elementów daje wyrażenie dokładne.

Z powodów praktycznych szeregi są zwykle obcinane po wyrażeniach rzędu drugiego.

W każdym rozwiązaniu dokonanym metodą różnic skończonych występuje taki właśnie błąd.

Stosując metodę różnic skończonych do znalezienia funkcji $\Phi(x, t)$, dzieli się region rozwiązania w płaszczyźnie x – t na prostokąty lub inne siatki o bokach Δx i Δt .



Współrzędne x , t i funkcja $\Phi(x, t)$, w punkcie P:

$$x = i\Delta x, \quad t = j\Delta t, \quad i, j = 0, 1, 2, \dots$$

$$\Phi_P = \Phi(i\Delta x, j\Delta t) = \Phi(i, j)$$

Aproksymacja pochodnych Φ w węźle i, j przez centralną różnicę funkcji:

$$\Phi^x \Big|_{i,j} \approx \frac{\Delta x}{\Phi(i+\Delta x, j) - \Phi(i-\Delta x, j)}$$

$$\Phi^y \Big|_{i,j} \approx \frac{\Delta y}{\Phi(i, j+\Delta y) - \Phi(i, j-\Delta y)}$$

$$\Phi^{xx} \Big|_{i,j} \approx \frac{\Delta x^2}{\Phi(i+\Delta x, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-\Delta x, j)}$$

$$\Phi^{yy} \Big|_{i,j} \approx \frac{\Delta y^2}{\Phi(i, j+\Delta y) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-\Delta y)}$$

Równanie paraboliczne

$$k \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}$$

Równanie dyfuzji

Ekwiwalentne równanie różnicowe

$$k \frac{\Phi(i, j+1) - \Phi(i, j)}{\Delta t} = \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{\Delta x^2}$$

gdzie została zastosowana progresywna formuła różnicowa dla t i centralna dla x .

Równanie hiperboliczne

$$c^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}$$

Równanie falowe

Ekwiwalentne równanie różnicowe

$$c^2 \frac{\Phi(i+1, j) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i-1, j)}{\Delta x^2} = \frac{\Phi(i, j+1) - 2\Phi(i, j) + \Phi(i, j-1)}{\Delta t^2}$$

Równanie eliptyczne (Poisson'a)

$$\nabla^2 \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = g(x, y)$$

centralna formuła różnicowa dla $\Delta x = \Delta y = h$

Równanie dla węzła i, j

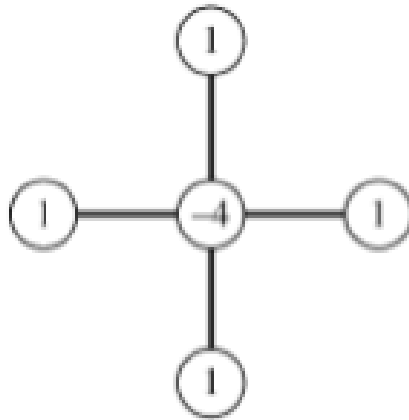
$$\left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) \right] - 4\Phi(i, j) = h^2 g(i, j)$$

Gdy $g(i, j) = 0$ równanie Poisson'a przechodzi w równanie Laplace'a

$$\Phi(i, j) = \frac{1}{4} \left[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) \right]$$

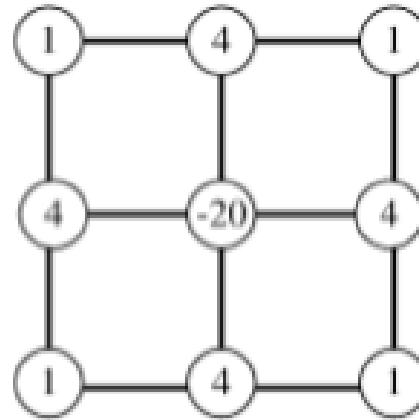
Schemat można przedstawić symbolicznie :

$$-4\Phi(i, j) + \Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1) = 0$$



(a)

aproksymacja 2 rzędu



(b)

aproksymacja 4 rzędu

$$\begin{aligned} & -20\Phi(i, j) + 4[\Phi(i+1, j) + \Phi(i-1, j) + \Phi(i, j+1) + \Phi(i, j-1)] + \\ & + \Phi(i+1, j-1) + \Phi(i-1, j-1) + \Phi(i-1, j+1) + \Phi(i+1, j+1) = 0 \end{aligned}$$

Otrzymuje się układ równań algebraicznych, którego macierz, najczęściej, jest tzw. macierzą rzadką.

Powstaje konieczność stosowania odpowiednich technik rozwiązywania takich układów równań zarówno ze względu na błędy obliczeń jak również na ich szybkość, związaną głównie z wielkością dostępnej pamięci maszyny liczącej.

Metoda pasmowa

$$[A][X] = [B]$$

$[A]$ macierz rzadka (ma wiele elementów zerowych)

$[X]$ macierz kolumnowa nieznanych wartości (free nodes)

$[B]$ macierz kolumnowa znanych wartości (fixed nodes)

Rozwiązanie przez odwrócenie macierzy

$$[X] = [A]^{-1} [B]$$

lub eliminację Gaussa

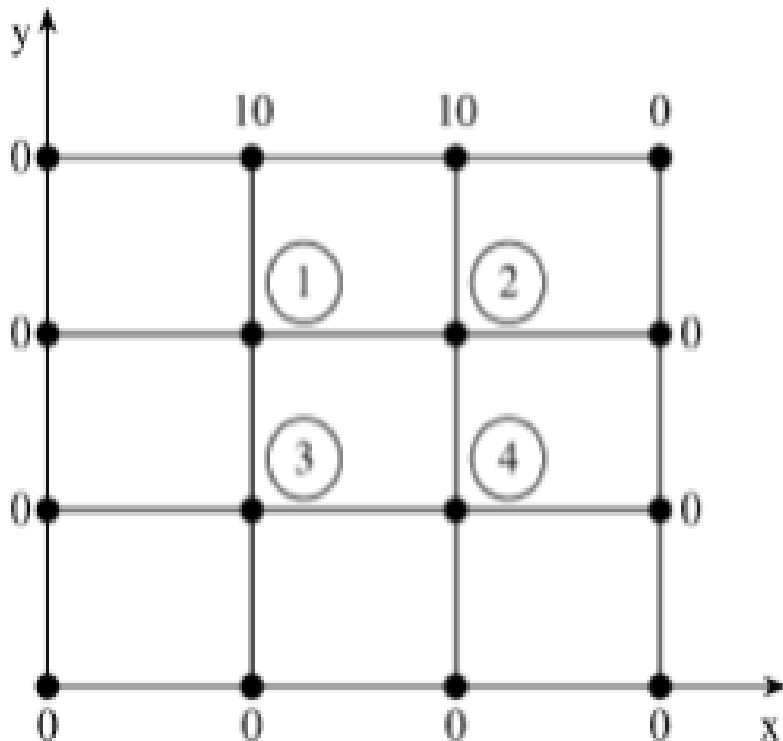
Równanie Laplace'a

$$\nabla^2 V = 0, \quad 0 \leq x, y \leq 1$$

$$z \quad V(x, 1) = 45x(1 - x),$$

$$V(x, 0) = 0 = V(0, y) = V(1, y)$$

niech krok $h = 1/3$



$$4V_1 - V_2 - V_3 - 0 = 10$$

$$-V_1 + 4V_2 - 0 - V_4 = 10$$

$$-V_1 - 0 + 4V_3 - V_4 = 0$$

$$-0 - V_2 - V_3 + 4V_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Rozwiązując układ przez odwrócenie macierzy lub eliminację Gauss'a otrzyma się:

$$V_1 = 3,75, V_2 = 3,75, V_3 = 1,25, V_4 = 1,25$$

Równanie Poisson'a dla prądu w węźle i,k

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} = -\mu J(x_i, y_k)$$

Po podstawieniu równań różnicowych

$$A_{i,k} = \frac{1}{4} (A_{i+1,k} + A_{i,k+1} + A_{i-1,k} + A_{i,k-1} + \mu h^2 J_{i,k})$$

Równanie Laplace'a w obszarach bezprądowych. Potencjał jest średnią arytmetyczną potencjałów w węzłach sąsiednich.

$$A_{i,k} = \frac{1}{4} (A_{i+1,k} + A_{i,k+1} + A_{i-1,k} + A_{i,k-1})$$

Równań tych jest tyle ile węzłów siatki objętych brzegiem.

Dla uzyskania zadawalających wyników konieczna jest duża liczba węzłów, a więc i równań. Do rozwiązania takich układów potrzebny jest szybki komputer.

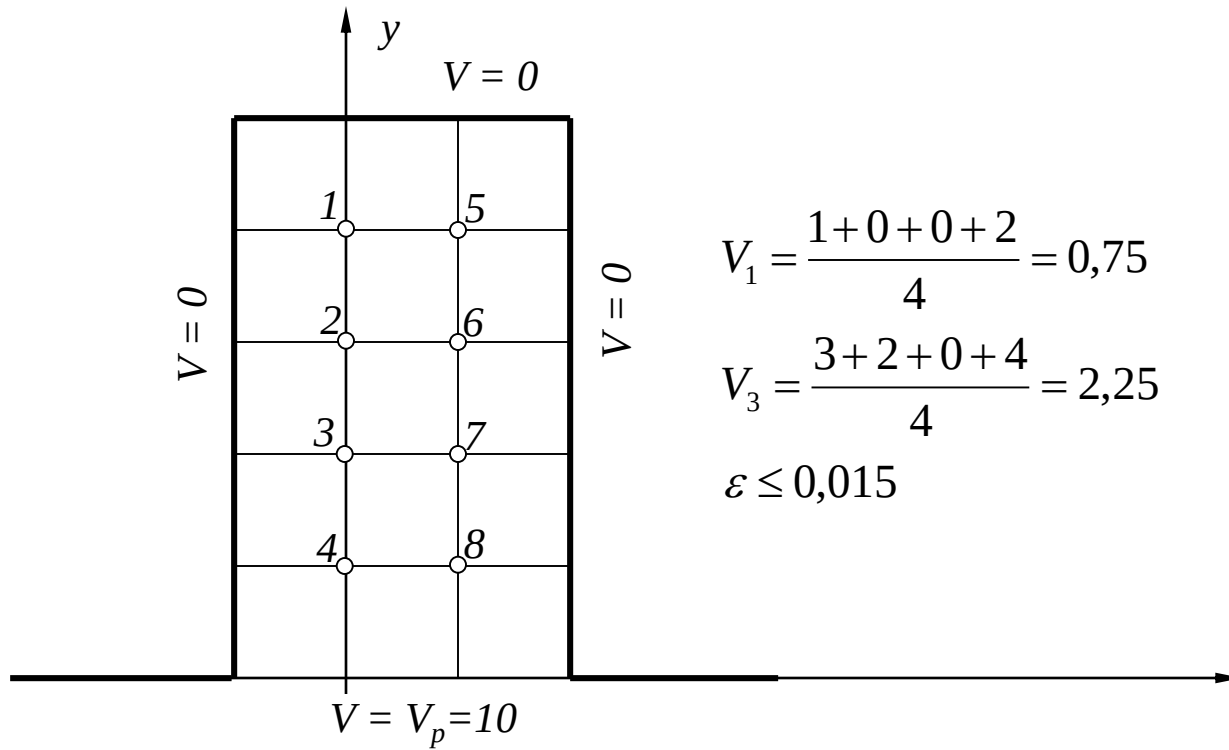
Poza metodą pasmową do rozwiązania układu równań najczęściej stosuje się metody:

- iteracyjną (kolejnych przybliżeń)
- nadrelaksacyjną
- przebiegania
- mieszaną (iteracji i przebiegania)

W metodzie iteracyjnej węzłom granicznym przypisuje się zadane wartości A_S , a pozostałym wartości dowolne (np. zerowe albo oczekiwane). Następnie korzystając z uzyskanych zależności obliczamy wartości A w każdym węźle, korzystając z danych węzłów sąsiednich. Jest to pierwsze przybliżenie. Następnie powtarzamy operację tyle razy, aż dla funkcji siatkowej A_h w każdym węźle uzyskamy zadaną dokładność

$$\max |A_h^{(j+1)} - A_h^{(j)}| \leq \varepsilon$$

gdzie: $j = 1, 2, 3 \dots$ numer kolejnej iteracji
 ε - założona dokładność



Nr iteracji	V_1	V_2	V_3	V_4	V_5	V_6	V_7	V_8	ε
1	1	2	3	4	1	2	3	4	
2	0,750	1,500	2,250	4,250	0,750	1,500	2,250	4,250	0,500
3	0,563	1,125	2,000	4,125	0,563	1,125	2,000	4,125	0,375
4	0,422	0,922	1,813	4,031	0,422	0,922	1,813	4,031	0,203
5	0,336	0,789	1,691	3,961	0,336	0,789	1,691	3,961	0,133
6	0,281	0,704	1,610	3,913	0,281	0,704	1,610	3,913	0,085
7	0,246	0,649	1,557	3,881	0,246	0,649	1,557	3,881	0,055
8	0,224	0,613	1,522	3,859	0,224	0,613	1,522	3,859	0,036
9	0,209	0,590	1,499	3,845	0,209	0,590	1,499	3,845	0,023
10	0,200	0,574	1,483	3,836	0,200	0,574	1,483	3,836	0,015

Proces iteracji można przyspieszyć stosując metodę nadrelaksacji tzn. zastępując równanie:

$$A'_{SR} = A_{i,k} = \frac{1}{4} (A_{i+1,k} + A_{i,k+1} + A_{i-1,k} + A_{i,k-1})$$

równaniem

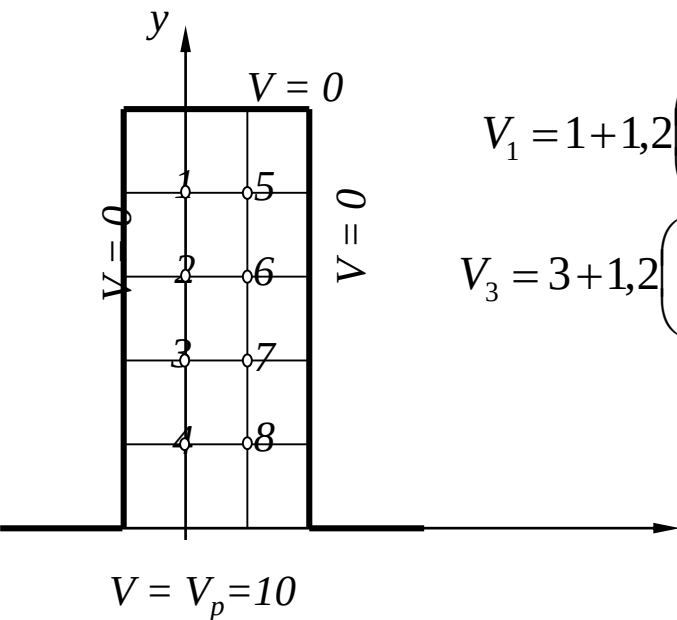
$$A_{i,k}^{j+1} = A_{i,k}^j + r (A'_{SR} - A_{i,k}^j)$$

gdzie r jest tzw. współczynnikiem relaksacji

Gdy $r = 1$ metoda relaksacji jest równoważna metodzie iteracyjnej.

Przyjęcie $r > 1$ (zwykle 1,1 - 1,3) daje znaczne przyspieszenie redukcji błędu.

Za bardziej skuteczną od metody iteracyjnej uważa się metodę przebiegania z wykorzystaniem tzw. schematu niejawnego.



$$V_1 = 1 + 1,2 \left(\frac{1+0+0+2}{4} - 1 \right) = 0,7$$

$$V_2 = 2 + 1,2 \left(\frac{2+1+0+3}{4} - 2 \right) = 1,4$$

$$V_3 = 3 + 1,2 \left(\frac{3+2+0+4}{4} - 3 \right) = 2,1$$

$$V_4 = 4 + 1,2 \left(\frac{0+3+4+10}{4} - 4 \right) = 4,3$$

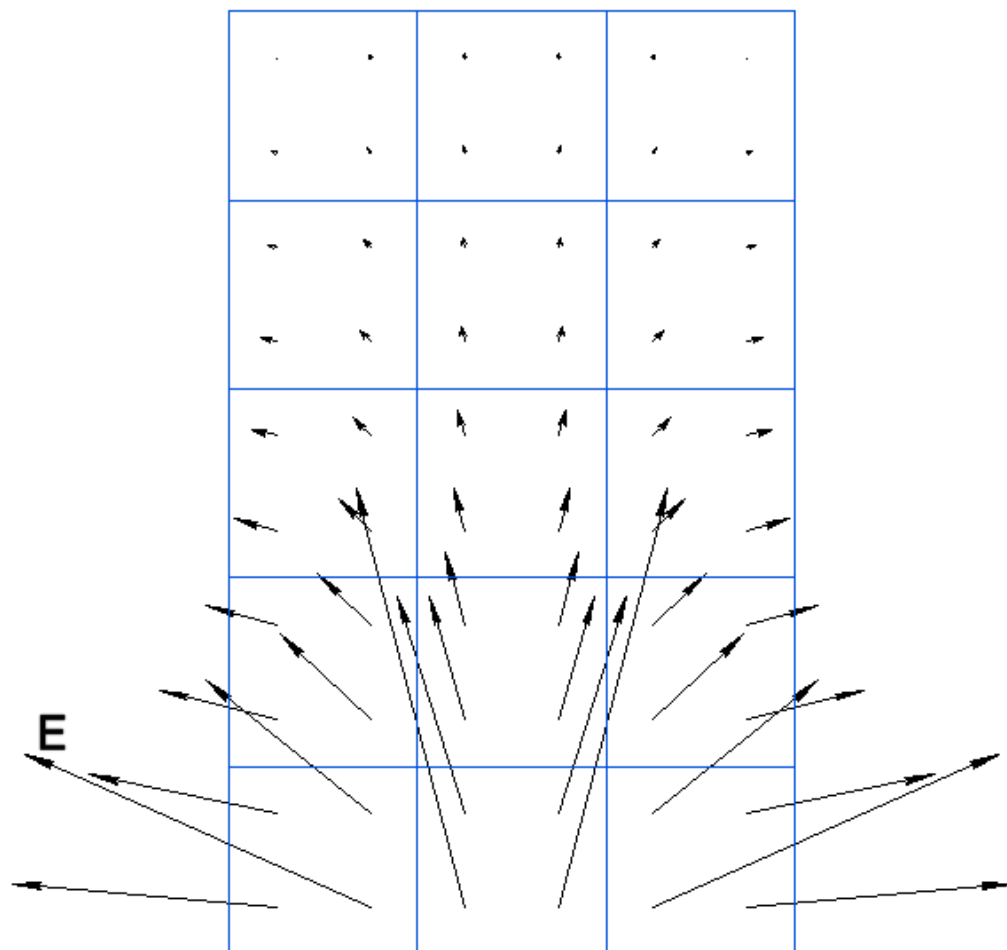
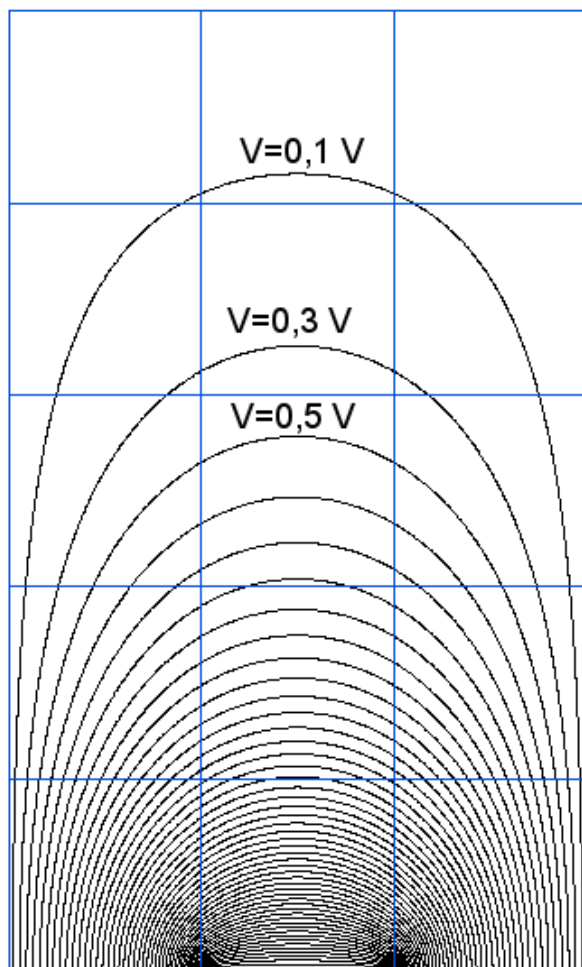
$$\varepsilon \leq 0,015$$

$$r = 1,2$$

$$A_{l,k}^{j+1} = A_{l,k}^j + r \left(A_{SR} - A_{l,k}^j \right)$$

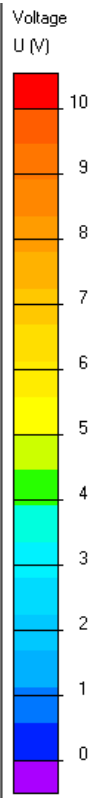
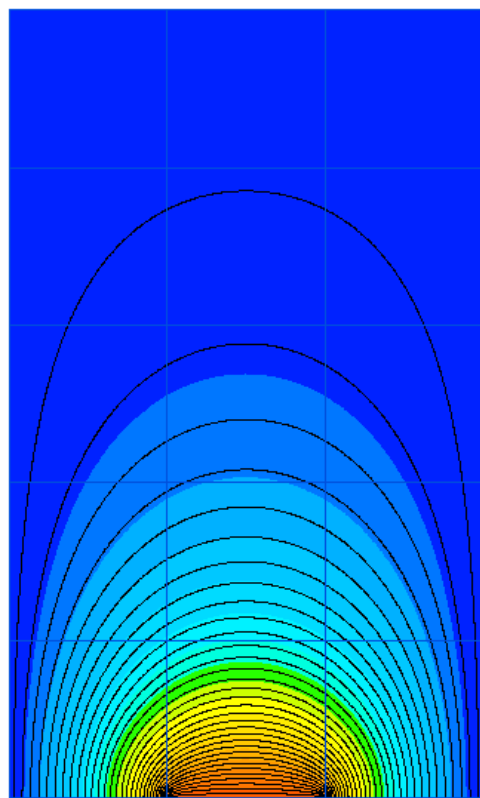
Nr iteraciji	V ₁	V ₂	V ₃	V ₄	V ₅	V ₆	V ₇	V ₈	ε
1	1	2	3	4	1	2	3	4	
2	0,700	1,400	2,100	4,300	0,700	1,400	2,100	4,300	0,600
3	0,490	0,980	1,920	4,060	0,490	0,980	1,920	4,060	0,420
4	0,343	0,821	1,704	3,982	0,343	0,821	1,704	3,982	0,159
5	0,281	0,696	1,611	3,909	0,281	0,696	1,611	3,909	0,125
6	0,237	0,637	1,543	3,874	0,237	0,637	1,543	3,874	0,059
7	0,215	0,598	1,508	3,850	0,215	0,598	1,508	3,850	0,040
8	0,201	0,577	1,485	3,837	0,201	0,577	1,485	3,837	0,021
9	0,193	0,563	1,473	3,829	0,193	0,563	1,473	3,829	0,013
10	0,188	0,556	1,465	3,825	0,188	0,556	1,465	3,825	0,007

Iteracje	Metoda	V1	V2	V3	V4	V5	V6	V7	V8
30	MES	0,107	0,343	0,989	2,826	0,107	0,343	0,989	2,826
10	MRS	0,188	0,556	1,465	3,825	0,188	0,556	1,465	3,825

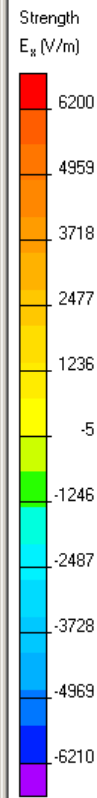
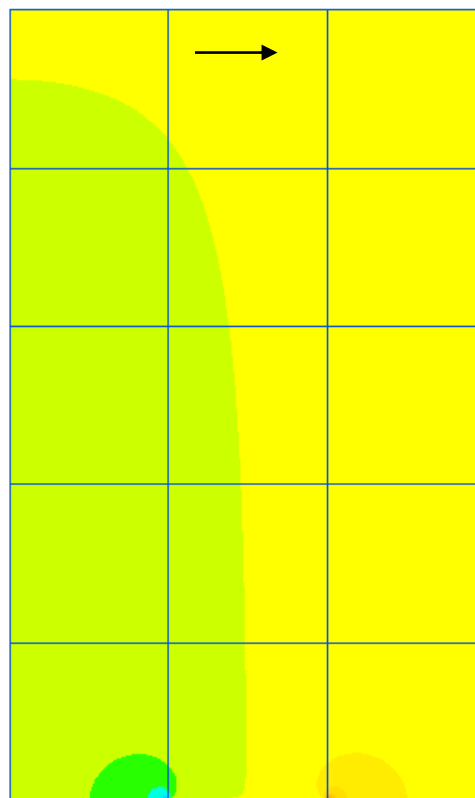


Natężenie pola

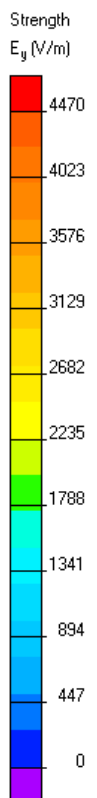
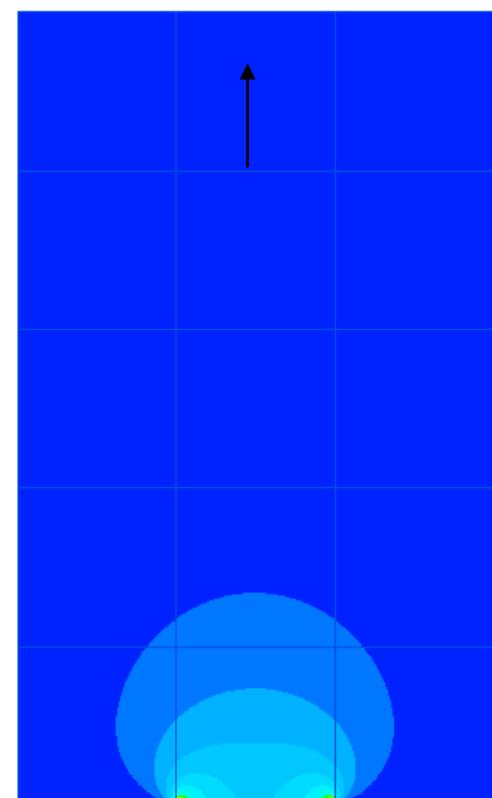
Potencjał



Składowa E_x

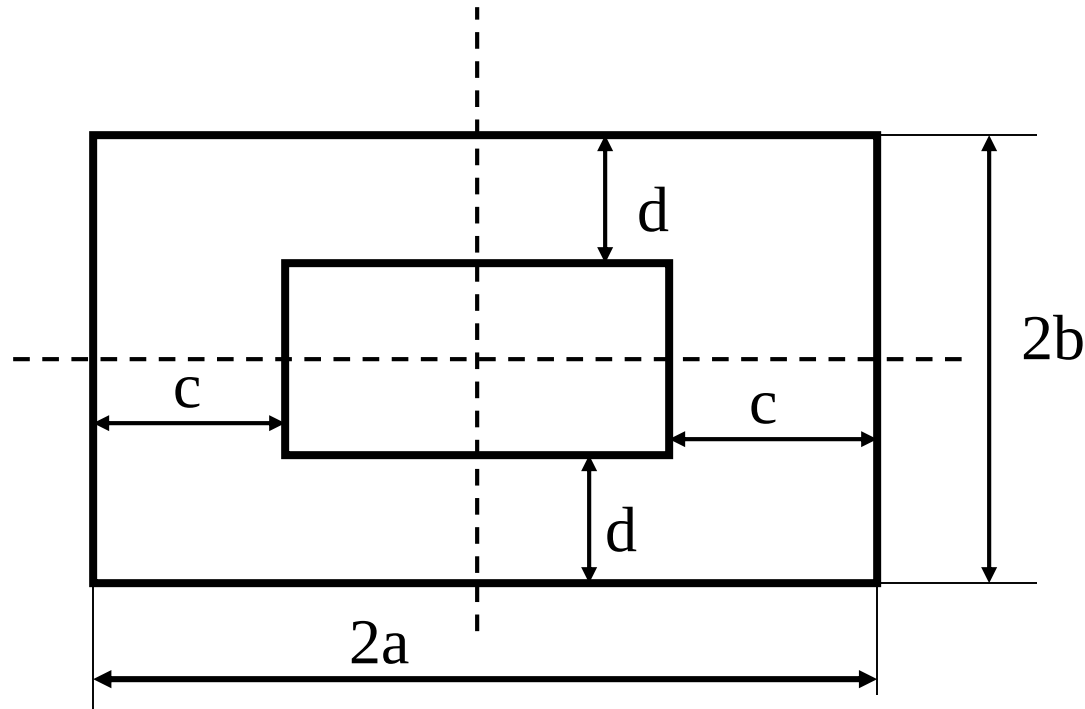


Składowa E_y



Przykład:

Dany jest układ dwóch długich przewodników o przekroju prostokątnym. Określić rozkład potencjału wewnątrz rury.



$$2a = 100\text{mm}$$

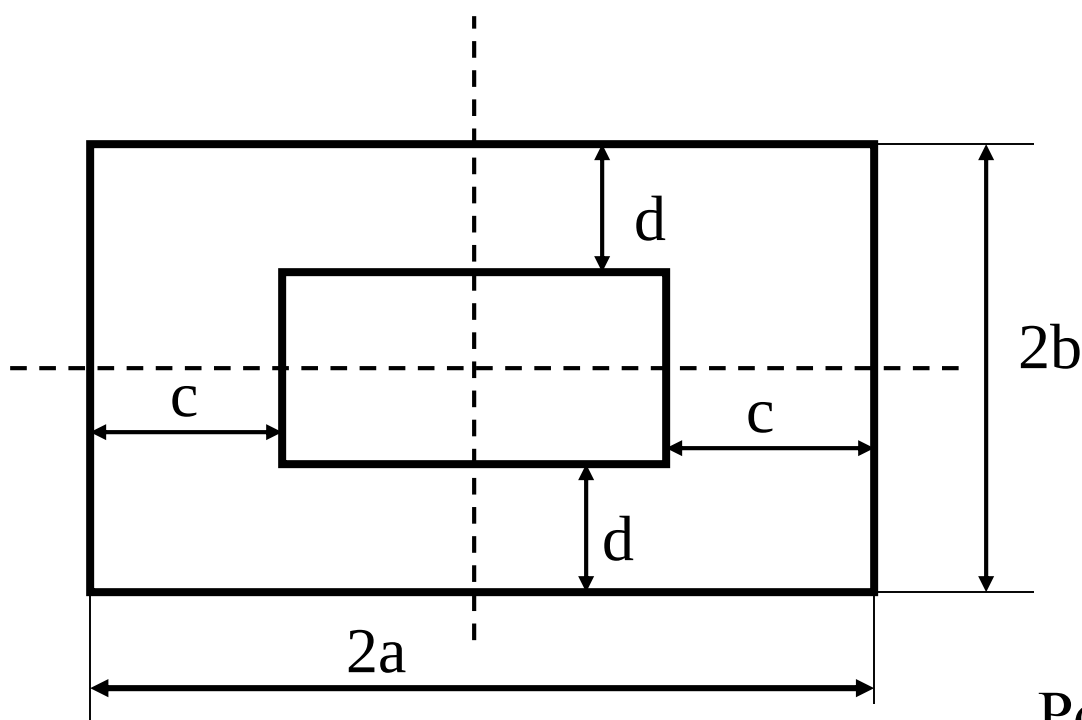
$$2b = 50\text{mm}$$

$$c = 20\text{mm}$$

$$d = 10\text{mm}$$

Elektroda zewnętrzna jest uziemiona.

Potencjał elektrody wewnętrznej wynosi U .

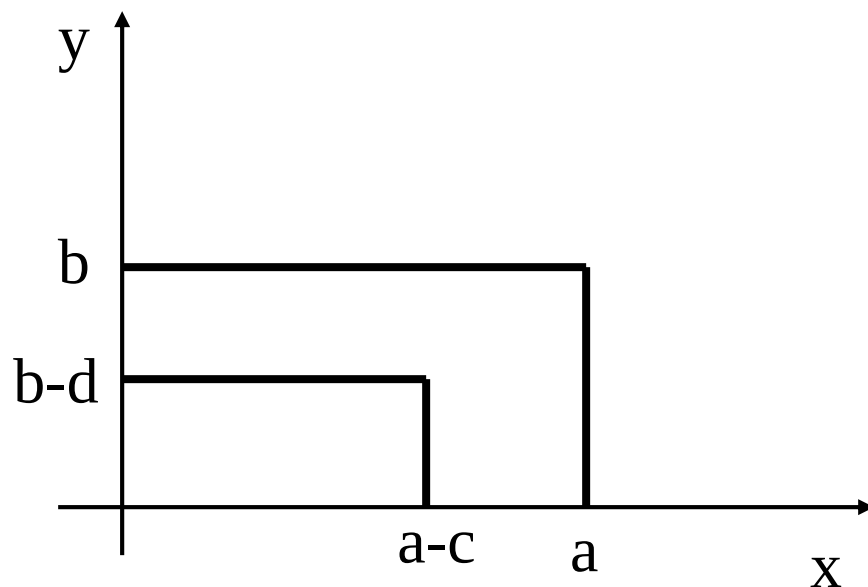


Potencjał φ spełnia
równanie Laplace'a w
układzie współrzędnych
prostokątnych.

Wystarczy rozpatrzyć model 2D

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$$

Wystarczy obliczyć rozkład potencjału w $\frac{1}{4}$ przekroju:



warunki brzegowe:

$$\varphi = U|_{x=a-c}$$

$$\varphi = U|_{y=b-d}$$

$$\varphi = 0|_{x=a}$$

$$\varphi = 0|_{y=b}$$

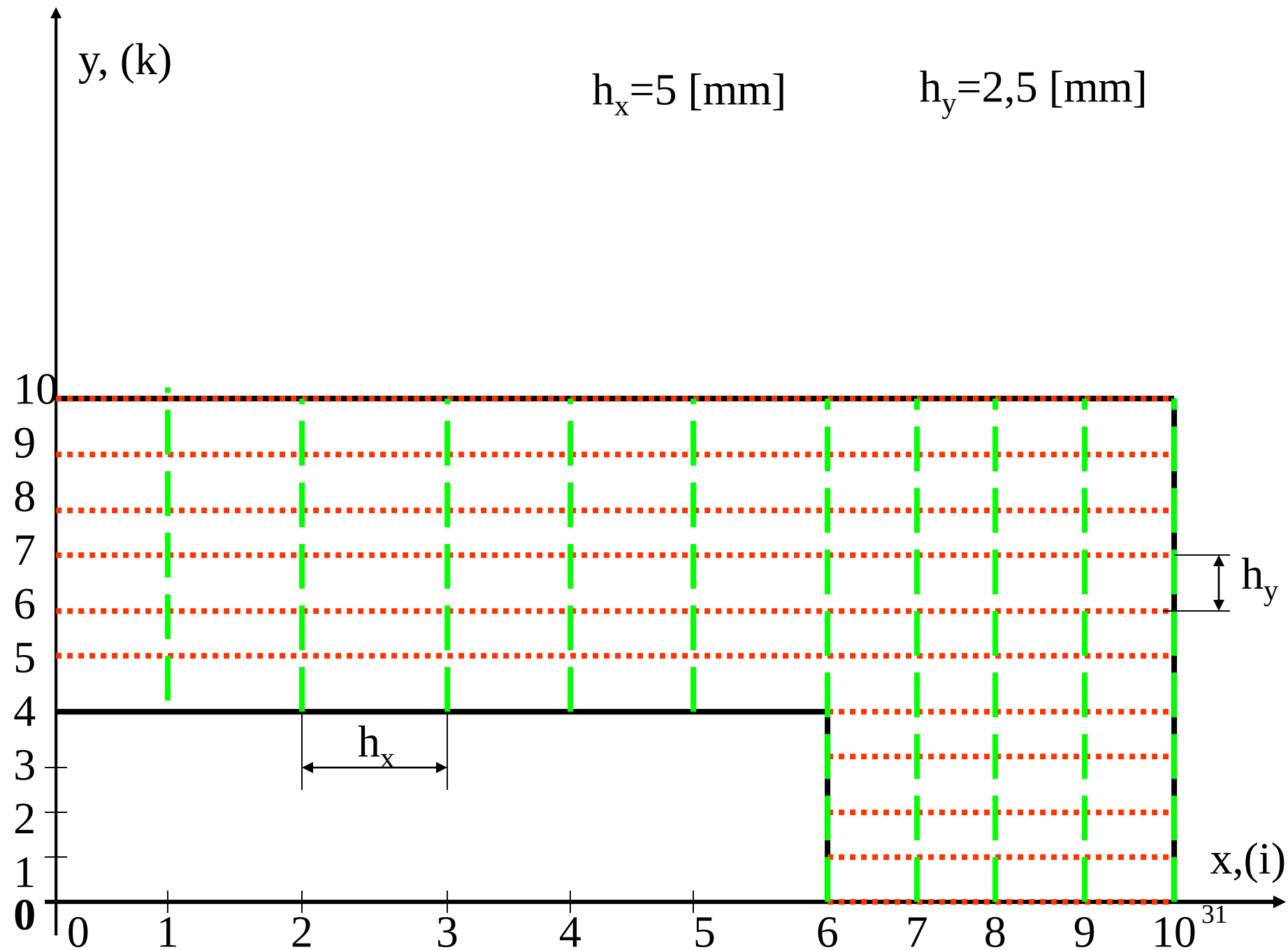
osi x:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

Symetria względem:

osi y:

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$$





Węzły: 1, 6, 11, 16, 21 oraz 56 ÷ 61
potencjał znany $U=100V$

5, 10, 15, 20, 25, 26, 31, 36, 41, 46,
51÷55, 92÷97
potencjał znany $U=0V$



Węzły 2, 3 i 4 warunek brzegowy

$$\left. \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0$$

czyli

$$\frac{\varphi_7 - \varphi_2}{h_y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_2 = \varphi_7$$

$$\frac{\varphi_8 - \varphi_3}{h_y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_3 = \varphi_8$$

$$\frac{\varphi_9 - \varphi_4}{h_y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_4 = \varphi_9$$

węzeł 7:

$$\frac{U - 2\varphi_7 + \varphi_8}{h_x^2} + \frac{\varphi_2 - 2\varphi_7 + \varphi_{12}}{h_y^2} = 0$$

lub

$$-\left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \varphi_7 + \frac{\varphi_8}{h_x^2} + \frac{\varphi_{12}}{h_y^2} = -\frac{U}{h_x^2}$$

$$\frac{\varphi_7}{h_x^2} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \varphi_8 + \frac{\varphi_9}{h_x^2} + \frac{\varphi_{13}}{h_y^2} = 0$$

$$\frac{\varphi_8}{h_x^2} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) \varphi_9 + \frac{\varphi_{14}}{h_y^2} = 0$$

węzły 12, 13, 14:

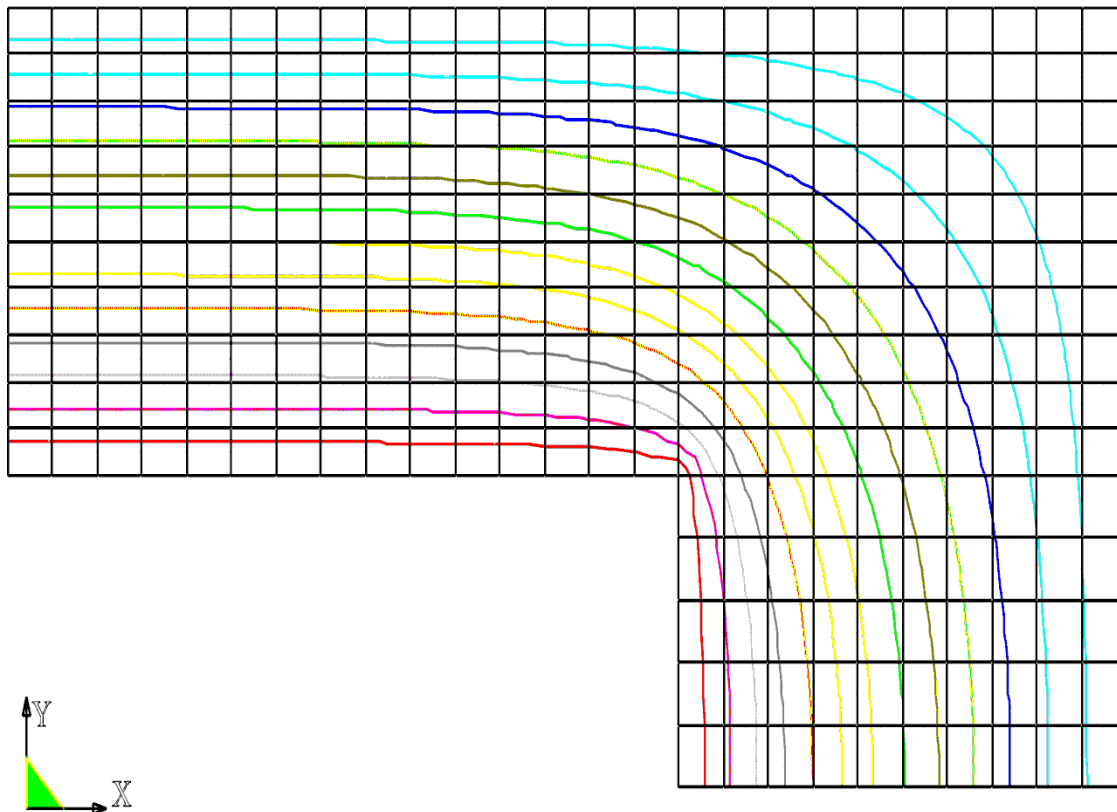
$$\frac{\varphi_7}{h_y^2} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) \varphi_{12} + \frac{\varphi_{13}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{17}}{h_y^2} = -\frac{U}{h_x^2}$$

$$\frac{\varphi_8}{h_y^2} + \frac{\varphi_{12}}{h_x^2} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) \varphi_{13} + \frac{\varphi_{14}}{h_x^2} + \frac{\varphi_{18}}{h_y^2} = 0$$

$$\frac{\varphi_9}{h_y^2} + \frac{\varphi_{13}}{h_x^2} - \left(\frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2} \right) \varphi_{14} + \frac{\varphi_{19}}{h_y^2} = 0$$

i.t.d.

Rozwiązanie



VOLTAGE

VIEW : 0.0

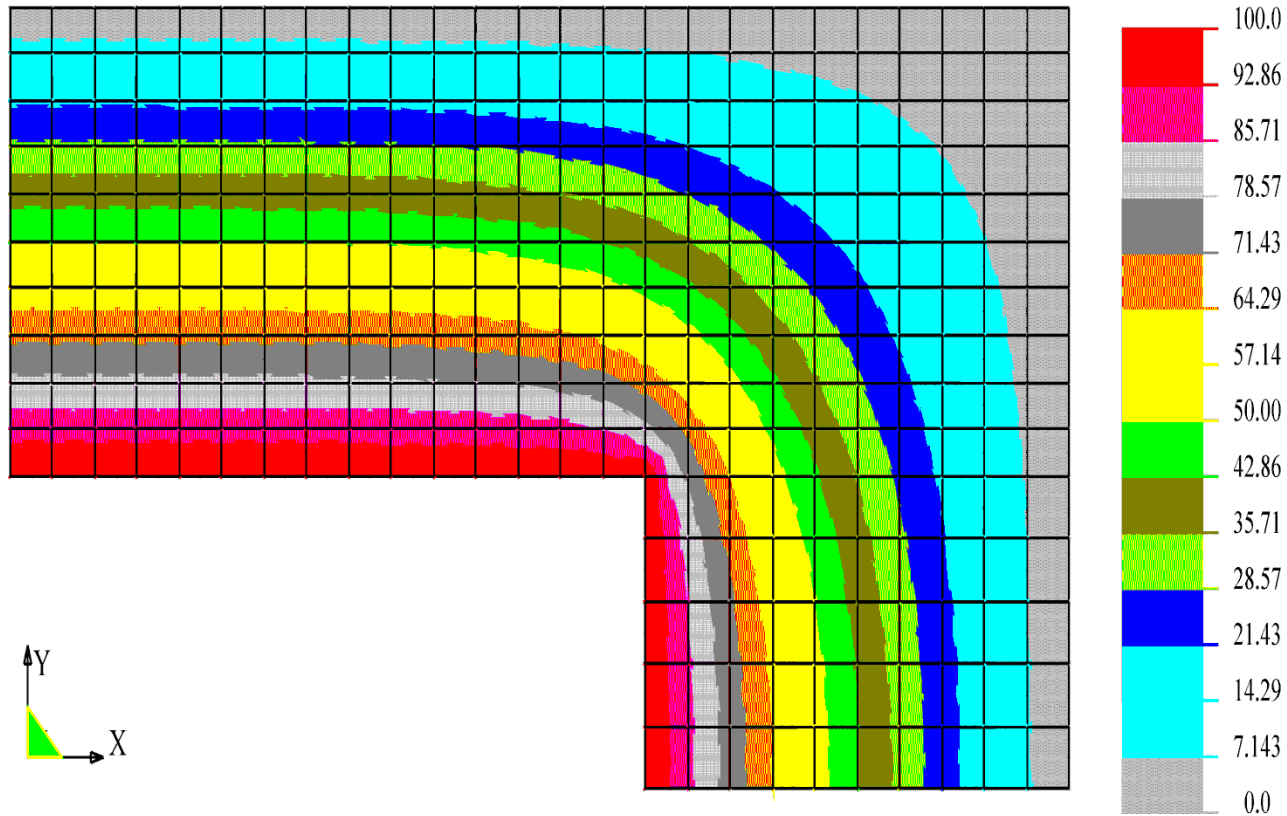
RANGE: 100.0

Max	100.0
13	92.86
12	85.71
11	78.57
10	71.43
9	64.29
8	57.14
7	50.00
6	42.86
5	35.71
4	28.57
3	21.43
2	14.29
1	7.143
Min	0.0

VOLTAGE

VIEW : 0.0

RANGE: 100.0

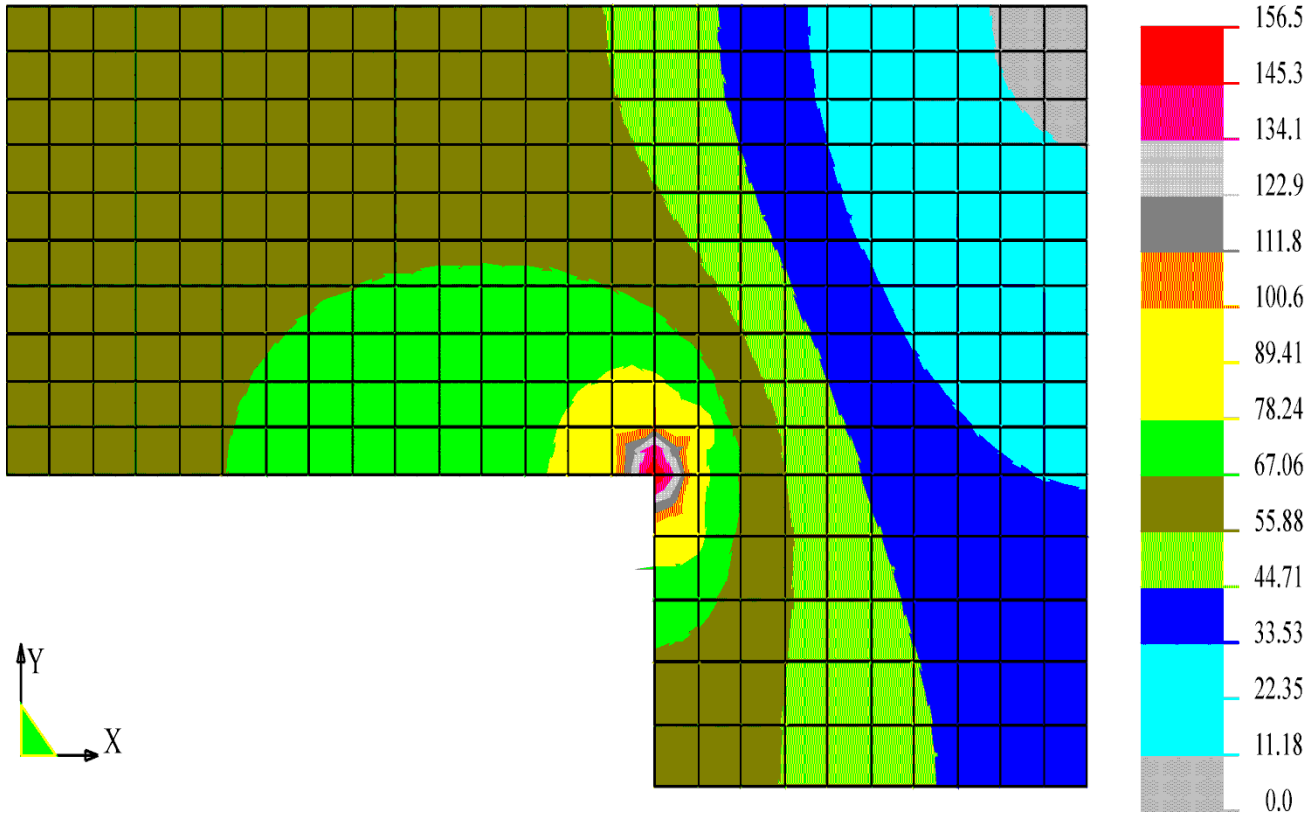


RESLT. ELE.FILED

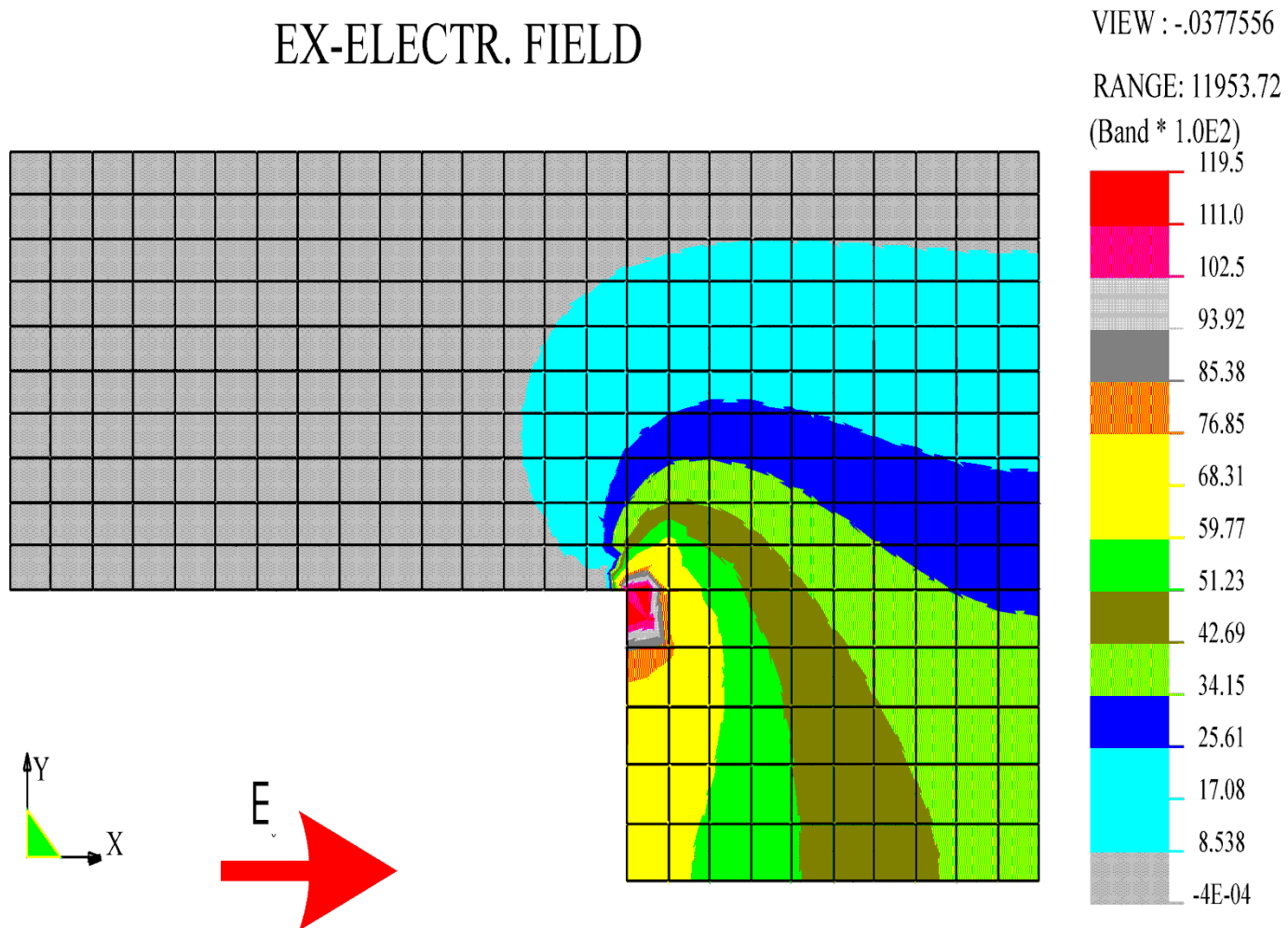
VIEW : 9.739E-13

RANGE: 15647.55

(Band * 1.0E2)



EX-ELECTR. FIELD

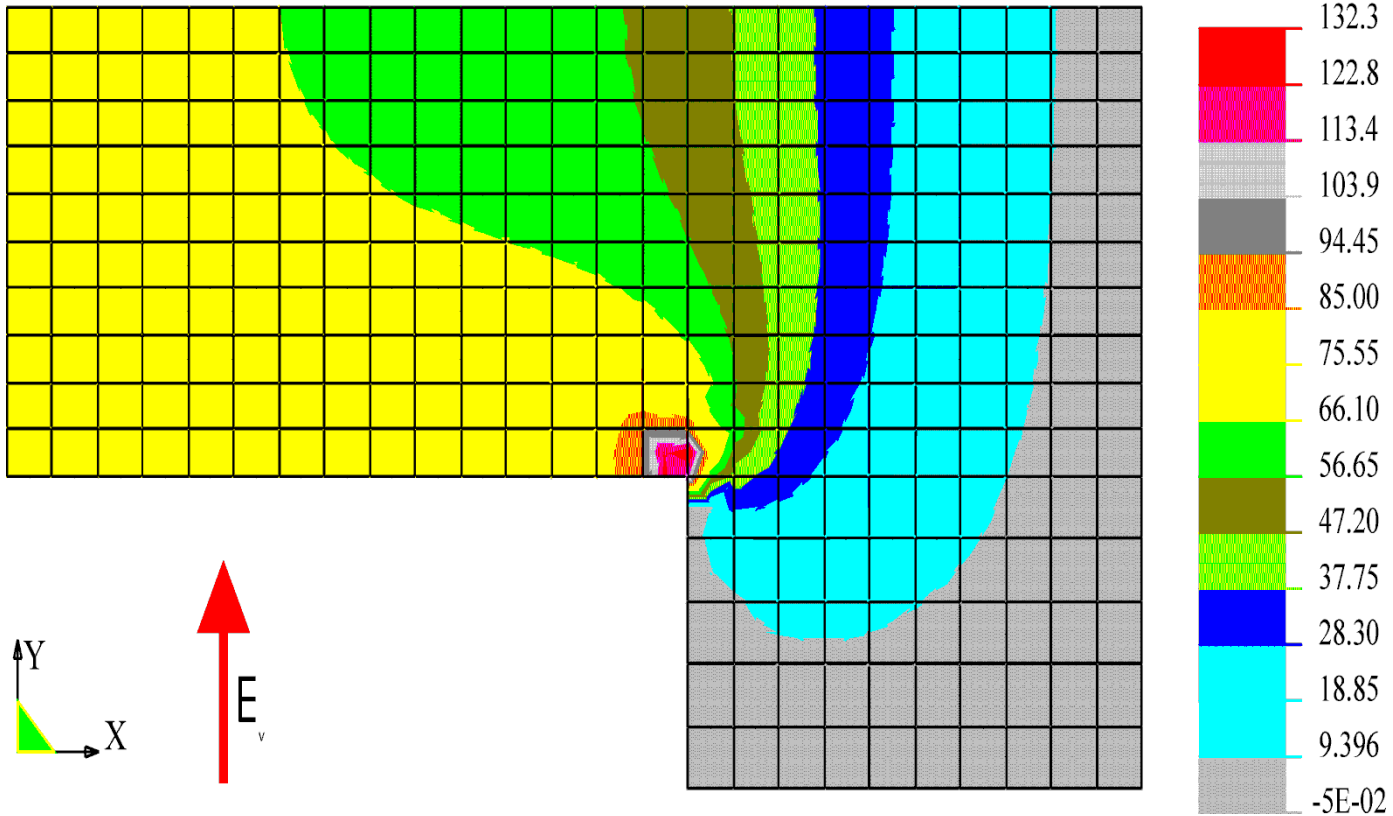


EY-ELECTR. FIELD

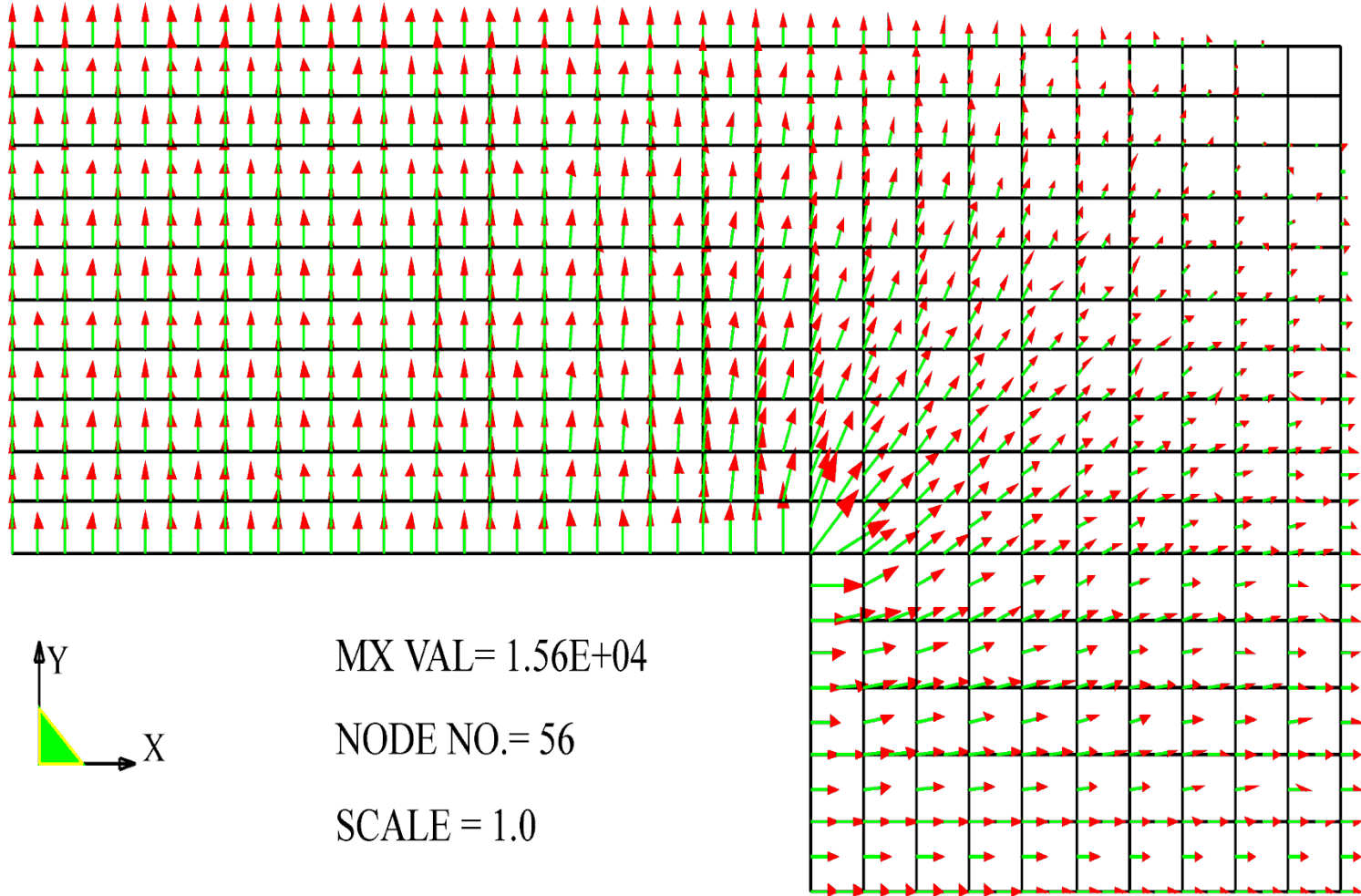
VIEW : -5.426098

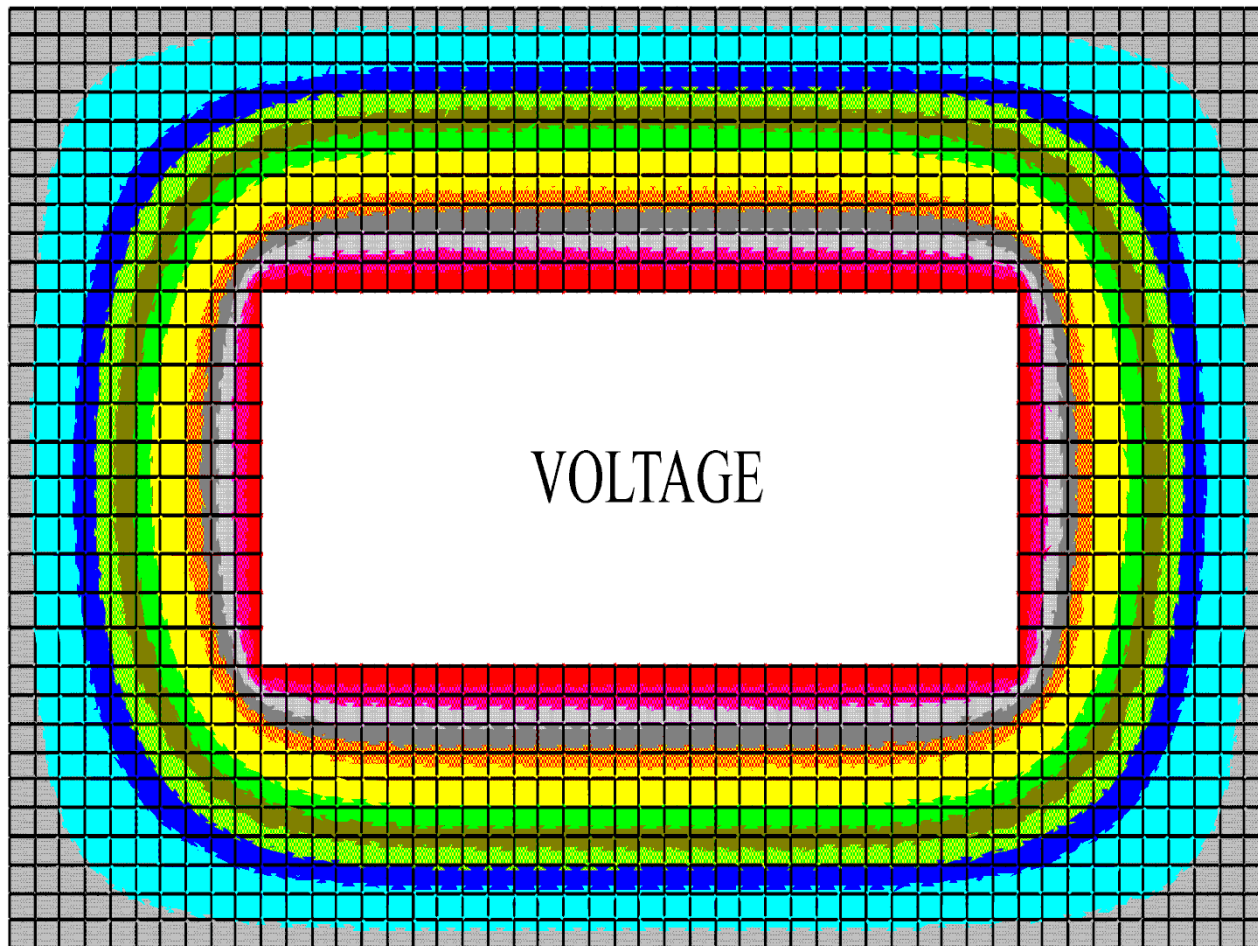
RANGE: 13225.44

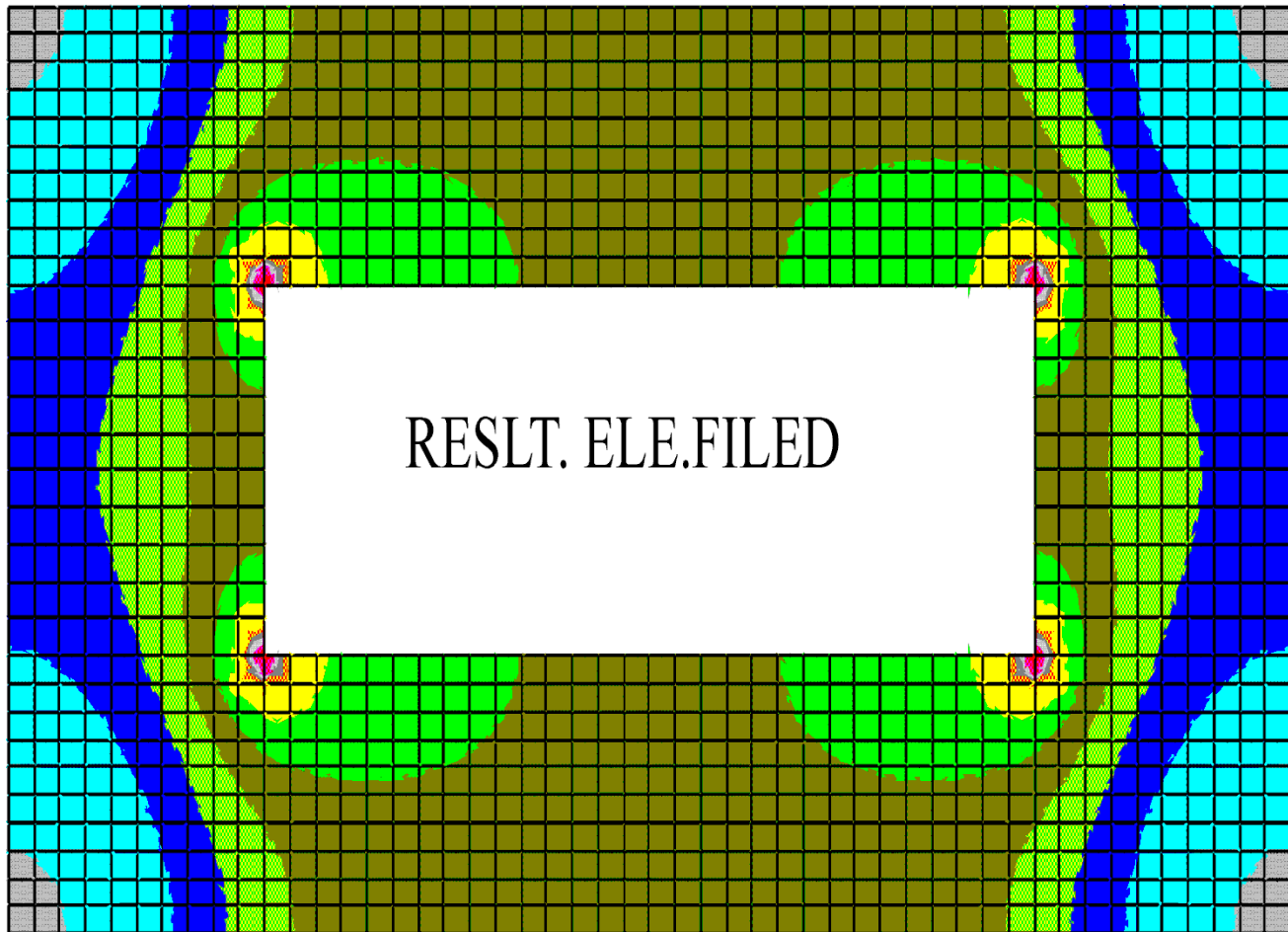
(Band * 1.0E2)



VECTOR PLOTS







W rozwiązaniu numerycznym problemu fizycznego występują trzy rodzaje nieuniknionych błędów:

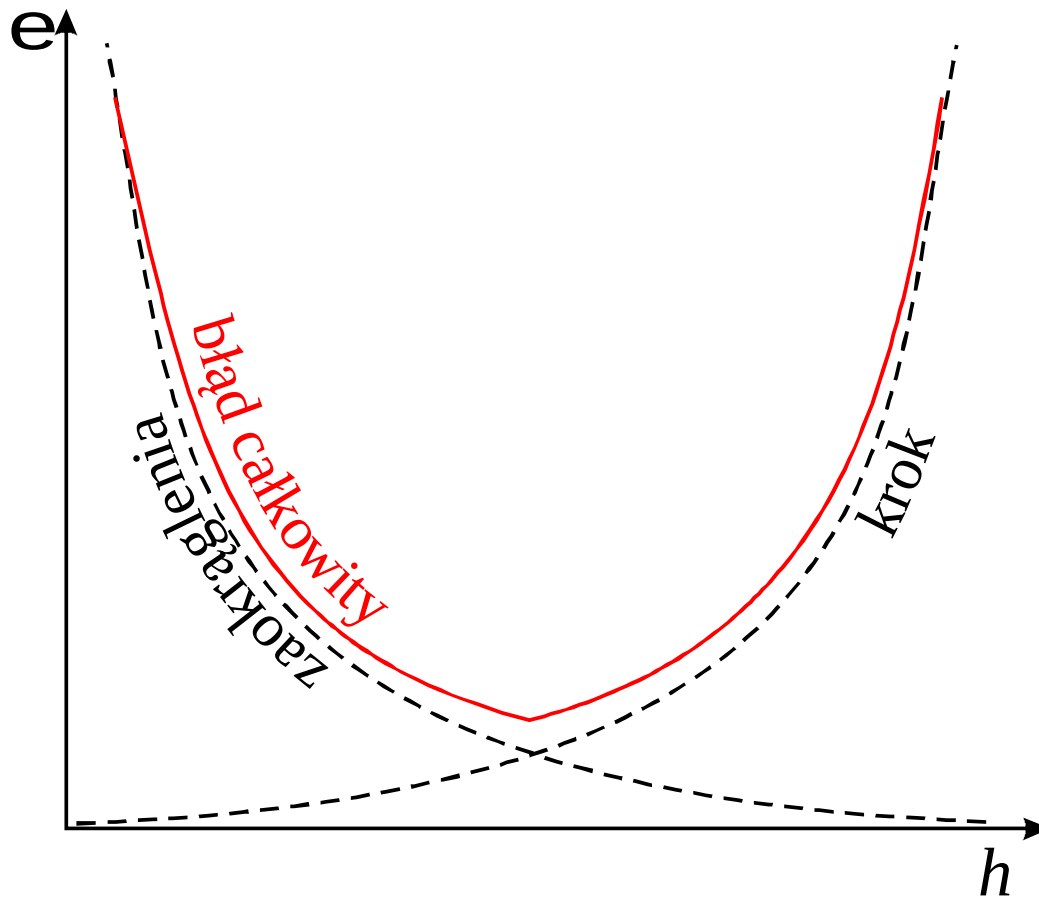
- błędy modelowania,
- błędy obcinania (dyskretyzacji)
- błędy zaokrągleń

Każdy z tych błędów obniża dokładność rozwiązania.

Błędy modelowania wynikają z założeń przyjętych w modelu matematycznym. Np. układ nieliniowy może być zamodelowany równaniem liniowym itp.

Błędy obcinania wynikają z obcięcia wyrazów nieskończonego szeregu Taylora. Mogą być zmniejszone przez zmniejszenie oczek siatki (kroku obliczeń) lub uwzględnienie większej liczby wyrazów szeregu (aproksymacje wyższych rzędów).

Błędy zaokrągleń wynikają z dokładności obliczeń komputera. Mogą być zmniejszone przez zastosowanie arytmetyki liczb podwójnej precyzji lub najlepiej, liczb całkowitych.



Zalety metod różnicowych dla równań eliptycznych

1. Łatwa konstrukcja siatki, szczególnie prostokątnej,
2. Proste wzory dla siatki ze stałym krokiem,
3. Oszczędne w wymaganiach co do pamięci mc ,
4. Łatwa organizacja algorytmu, proste zagęszczanie, przez połowienie siatki i metody iteracyjne szybko zbieżne dzięki dobremu startowi,
5. Można stosować do ośrodków niejednorodnych i anizotropowych oraz do ośrodków nieliniowych.

Wady metod różnicowych dla równań eliptycznych

1. Kłopoty z dopasowaniem siatki do obszaru,
2. Trudności z warunkami brzegowymi i związana z tym często utrata dokładności,
3. Konieczność równomiernego podziału i związana z tym duża liczba węzłów,
4. Poprawa dokładności obliczeń w zasadzie tylko przez zagęszczenie podziału.

Metoda elementów skończonych

Przygotowane na podstawie: Ludwik Antal, Numeryczna analiza pól elektromagnetycznych
za zgodą Autora

Metoda elementów skończonych (MES) [*Finite element method* (FEM)] ma swoje źródło w analizie strukturalnej.

Jej podstawy stworzył Courant już w 1943 r., ale metoda jest stosowana w rozwiązywaniu zagadnień elektromagnetycznych od roku 1968.

Metoda różnic skończonych (*finite difference method* - FDM) i metoda momentów (*method of moments* - MOM) to metody koncepcyjnie prostsze i łatwiejsze w programowaniu niż metoda elementów skończonych. Jednak MES jest metodą zdecydowanie silniejszą i bardziej uniwersalną w rozwiązywaniu problemów o złożonej geometrii i niejednorodnych środowiskach. Aplikacja MES stworzona dla określonej dyscypliny łatwo może być zastosowana do innej.

Zasadnicze etapy analizy MES

- dyskretyzacja regionu rozwiązania skończoną liczbą *subregionów* lub *elementów*,
- wyprowadzenie równań dla typowego elementu,
- złożenie wszystkich elementów w regionie rozwiązania,
- rozwiązanie uzyskanego układu równań.

Rozwiązanie problemu za pomocą metody elementów skończonych wymaga następujących czynności:

1. Analizowany obszar dzieli się na pewną skończoną liczbę geometrycznie prostych elementów, tzw. ***elementów skończonych***.
2. Zakłada się, że są one połączone ze sobą w skończonej liczbie punktów znajdujących się na ich obwodach. Najczęściej są to punkty narożne - noszą one nazwę ***węzłów***.
3. Obiera się pewne funkcje jednoznacznie określające rozkład analizowanej wielkości fizycznej wewnątrz elementów skończonych, zależnie od wartości tych wielkości fizycznych w węzłach. Funkcje te noszą nazwę funkcji węzłowych lub ***funkcji kształtu***.
4. Równania różniczkowe opisujące badane zjawisko przekształca się, przy pomocy tzw. ***funkcji wagowych***, do algebraicznych równań metody elementów skończonych.

5. Na podstawie równań metody elementów skończonych przeprowadza się **asemblację układu równań**, tzn. oblicza się wartości współczynników stojących przy niewiadomych oraz odpowiadające im wartości prawych stron.
Jeżeli rozwiązywane zadanie jest niestacjonarne, to w obliczaniu wartości prawych stron wykorzystuje się dodatkowo warunki początkowe. Liczba równań w układzie jest równa liczbie węzłów przemnożonych przez liczbę **stopni swobody węzłów**, tzn. liczbę niewiadomych występujących w pojedynczym węźle.
5. Do układu równań wprowadza się warunki brzegowe przez wykonanie odpowiednich modyfikacji macierzy współczynników układu równań oraz wektora prawych stron.
6. Rozwiązuje się układ równań otrzymując wartości poszukiwanych wielkości fizycznych w węzłach.

7. W zależności od typu rozwiązywanego problemu, lub potrzeb, oblicza się dodatkowe wielkości (energię, siły, impedancje itp.).
8. Jeżeli zadanie jest niestacjonarne, to czynności opisane w pkt. 5, 6, 7 i 8 powtarza się aż do momentu spełnienia warunku zakończenia obliczeń.
Może to być np. określona wartość wielkości fizycznej w którymś z węzłów, czas przebiegu zjawiska lub inny parametr.

Definicja:

Element skończony jest prostą figurą geometryczną (płaską lub przestrzenną), dla której określone zostały wyróżnione punkty zwane węzłami, oraz pewne funkcje interpolacyjne służące do opisu rozkładu analizowanej wielkości w jego wnętrzu i na jego bokach.

Węzły znajdują się w wierzchołkach elementu skończonego, ale mogą być również umieszczone na jego bokach i w jego wnętrzu. Jeżeli węzły znajdują się tylko w wierzchołkach, to element skończony jest nazywany *elementem liniowym* (funkcje interpolacyjne są wtedy liniowe). W pozostałych przypadkach mamy do czynienia z elementami wyższych rzędów.

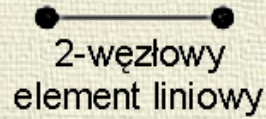
Funkcje interpolacyjne nazywa się funkcjami węzłowymi, bądź funkcjami kształtu.

Rząd elementu jest zawsze równy rządowi funkcji interpolacyjnych (funkcji kształtu).

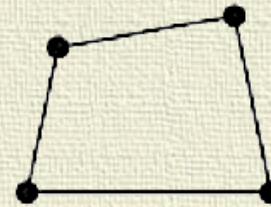
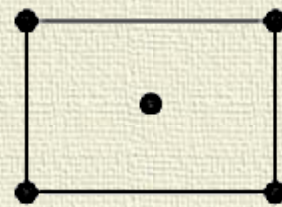
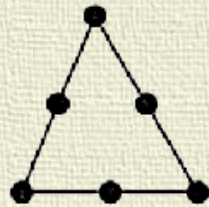
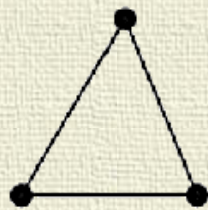
Liczba funkcji kształtu w pojedynczym elemencie skończonym jest równa liczbie jego węzłów.

Funkcje kształtu są zawsze tak zbudowane, aby w węzłach których dotyczą ich wartości wynosiły jeden, a w pozostałych węzłach przyjmowały wartość zero.

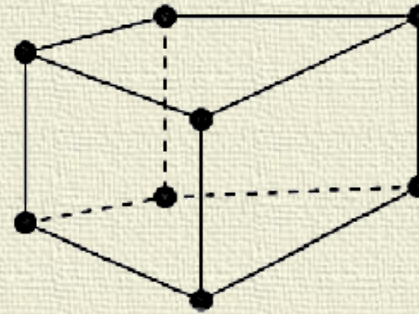
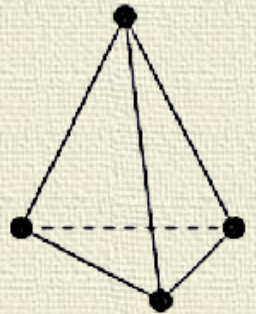
Typowe elementy jedno-, dwu- i trójwymiarowe



(a)



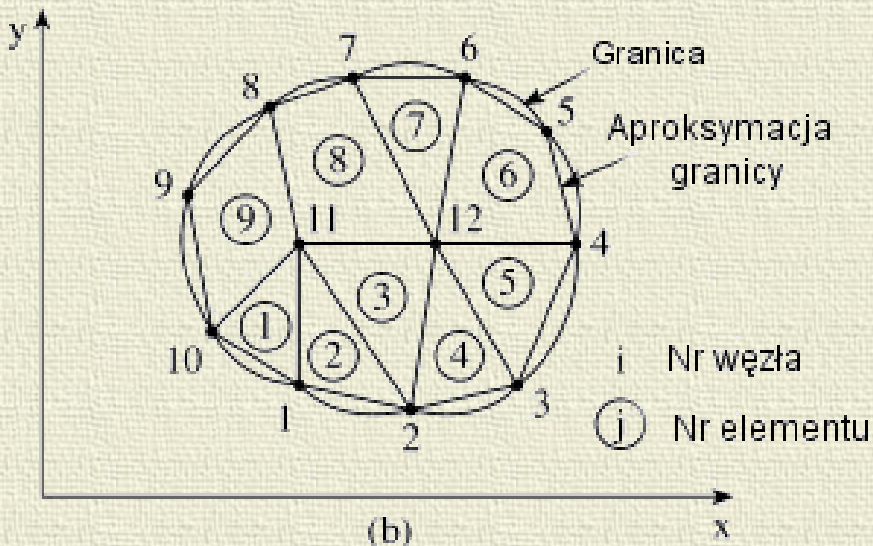
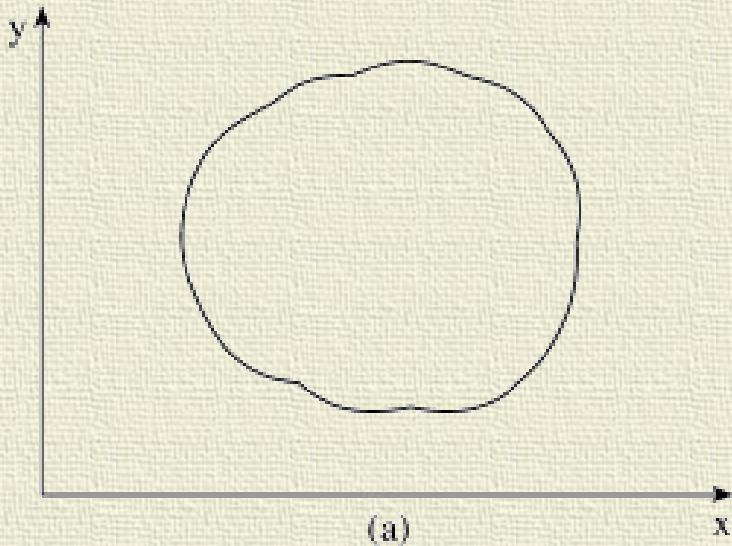
(b)



(c)

Rozwiązanie równania Laplace'a

$$\nabla^2 V = 0$$



Dyskretyzacja

Aby znaleźć rozkład potencjału $V(x, y)$ w dwuwymiarowym regionie rozwiązania, dzielimy się go na tzw. elementy skończone.

Elementy 6, 8, i 9 to 4-węzłowe czworokąty, a pozostałe 3-węzłowe trójkąty.

Dla ułatwienia obliczeń w praktyce stosuje się elementy tego samego typu, dlatego lepiej elementy czworokątne podzielić na trójkąty.

Szukamy aproksymacji dla potencjału V_e wewnątrz elementu e i następnie zależności rozkładu potencjału od różnych elementów, jako że potencjał jest ciągły poprzez granice międzyelementowe.
Aproksymacja rozwiązania dla całego regionu:

$$V(x, y) \cong \sum_{e=1}^N V_e(x, y)$$

N jest liczbą elementów trójkątnych

Najpopularniejszą formą aproksymacji V_e wewnątrz elementu jest aproksymacja wielomianowa:

dla trójkąta $V_e(x, y) = a + bx + cy$

dla czworokąta $V_e(x, y) = a + bx + cy + dxy$

Potencjał V_e wewnątrz elementu jest niezerowy, ale zerowy na zewnątrz.

Zauważmy, że założenie liniowej kombinacji potencjału wewnątrz elementu trójkątnego jest równoważne przyjęciu, że pole elektryczne wewnątrz elementu jest jednorodne tzn. ,

$$\mathbf{E}_e = -\nabla V_e = -\left(\frac{\partial V_e}{\partial x} \mathbf{a}_x + \frac{\partial V_e}{\partial y} \mathbf{a}_y \right) = -(b\mathbf{a}_x + c\mathbf{a}_y)$$

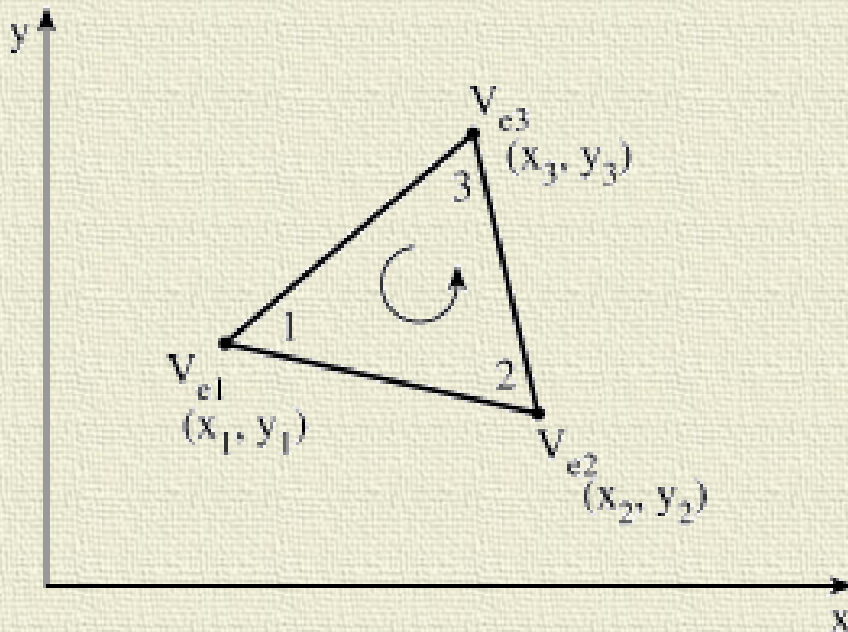
$\mathbf{a}_x$ i $\mathbf{a}_y$ – wektory jednostkowe

$$E_x = -b \qquad E_y = -c$$

Wyprowadzenie równań dla typowego elementu

Potencjały V_{e1} , V_{e2} , i V_{e3}
opisane są równaniem:

$$V_e(x, y) = a + bx + cy$$



$$\begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$$

Współczynniki a , b i c są określone równaniem poprzednim, jako

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

Podstawiając to do równanie na V_e otrzymamy

$$V_e = \begin{bmatrix} 1 & x & y \end{bmatrix} \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 & x_3 y_1 - x_1 y_3 & x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ y_2 - y_3 & y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 & x_2 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{e1} \\ V_{e2} \\ V_{e3} \end{bmatrix}$$

lub

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei}$$

α_i – liniowe funkcje interpolacyjne (funkcje kształtu)

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} \left[(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y \right]$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} \left[(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y \right]$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} \left[(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y \right]$$

Funkcje kształtu mają następujące własności:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i \neq j \end{cases}$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y]$$

Dla $x = x_1$ i $y = y_1$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (x_1 y_2 - x_1 y_3) + (x_3 y_1 - x_2 y_1)] = \frac{2A}{2A} = 1$$

Dla $x = x_2$ i $y = y_2$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(\cancel{x_2} y_3 - \cancel{x_3} y_2) + (\cancel{x_2} y_2 - \cancel{x_2} y_3) + (\cancel{x_3} y_2 - \cancel{x_2} y_2)] = 0$$

$$\sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) = 1$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_2 y_3 - x_3 y_2) + (y_2 - y_3) x + (x_3 - x_2) y] ,$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(x_3 y_1 - x_1 y_3) + (y_3 - y_1) x + (x_1 - x_3) y] ,$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (y_1 - y_2) x + (x_2 - x_1) y] ,$$

↓
2A

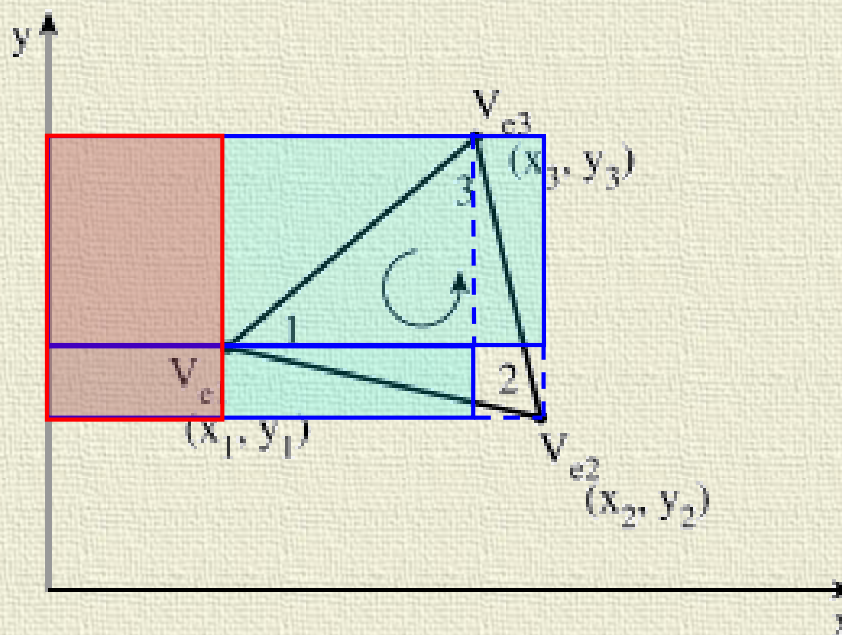
↓
0

„A” jest powierzchnią elementu e (pole powierzchni trójkąta)

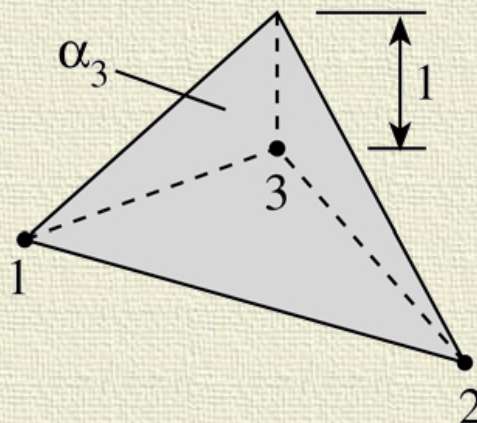
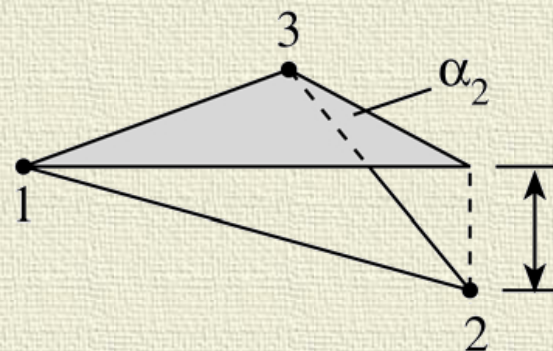
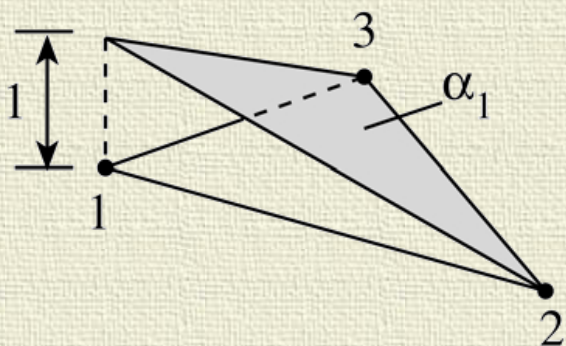
$$2A = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix} = (x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_1 - x_1 y_3) + (x_2 y_3 - x_3 y_2)$$

$$A = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]$$

„A” jest dodatnie jeżeli numeracja węzłów jest przeciwna do ruchu wskazówek zegara



Przykłady funkcji kształtu



Funkcjonał korespondujący z równaniem Laplace'a, $\Delta V = 0$, jest dany przez energię pola

$$W_E = \frac{1}{2} \int \varepsilon |E_E|^2 dS = \frac{1}{2} \int \varepsilon |V_E|^2 dS$$

Podstawowym zagadnieniem rachunku wariacyjnego jest wyznaczenie takich niewiadomych funkcji $u_i(x, y)$ (*ekstremali*), żeby całka I pewnej kombinacji tych funkcji i ich pochodnych przybierała wartość ekstremalną. Całka I nazywana jest *funkcjonałem*.

Największe znaczenie ma funkcyjnał typu:

$$I = \iint_{\Omega} F(u_i, x, y) dx dy$$

Typowe zagadnienie wariacyjne:

$$I = \min$$

Poszukuje się kombinacji liniowych ciągu funkcji, które od razu ekstremalizują funkcyjnał.

Z fizycznego punktu widzenia funkcjonal W_E jest energią przypadającą na jednostkę długości związanej z elementem E .

Z równania

$$V_e = \sum_{i=1}^3 \alpha_i(x, y) V_{ei}$$

wynika

$$\nabla V_e = \sum_{i=1}^3 V_{ei} \nabla \alpha_i$$

wtedy funkcjonal

$$W_E = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon V_{E_i} V_{E_j} \int \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS$$

Jeżeli oznaczy się:

$$C_{ij}^E = \int \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS$$

to funkcjonal można zapisać w formie macierzowej jako

$$W_E = \frac{1}{2} \varepsilon [V_E]^T [C^E] [V_E]$$

gdzie

macierz współczynników elementu

$$V_E = \begin{bmatrix} V_{E_1} \\ V_{E_2} \\ V_{E_3} \end{bmatrix} \quad [C^E] = \begin{bmatrix} C_{11}^E & C_{12}^E & C_{13}^E \\ C_{21}^E & C_{22}^E & C_{23}^E \\ C_{31}^E & C_{32}^E & C_{33}^E \end{bmatrix}$$

C_{ij} może być uważany za sprzężenie między węzłami i, j.

Na przykład

$$\begin{aligned} C_{12}^{(e)} &= \int \nabla \alpha_1 \cdot \nabla \alpha_2 dS \\ &= \frac{1}{4A^2} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \int dS = A \\ &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_3 - y_1) + (x_3 - x_2)(x_1 - x_3)] \end{aligned}$$

podobnie

$$\begin{aligned} C_{13}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)(y_1 - y_2) + (x_3 - x_2)(x_2 - x_1)] , & C_{21}^{(e)} &= C_{12}^{(e)}, & C_{31}^{(e)} &= C_{13}^{(e)}, & C_{32}^{(e)} &= C_{23}^{(e)} \\ C_{23}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)(y_1 - y_2) + (x_1 - x_3)(x_2 - x_1)] , \\ C_{11}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_2 - y_3)^2 + (x_3 - x_2)^2] , \\ C_{22}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_3 - y_1)^2 + (x_1 - x_3)^2] , \\ C_{33}^{(e)} &= \frac{1}{4A} [(y_1 - y_2)^2 + (x_2 - x_1)^2] \end{aligned}$$

Asemlacja elementów

Energia związana z kompletem elementów

$$W = \sum_{e=1}^N W_e = \frac{1}{2} \epsilon [V]^T [C] [V]$$

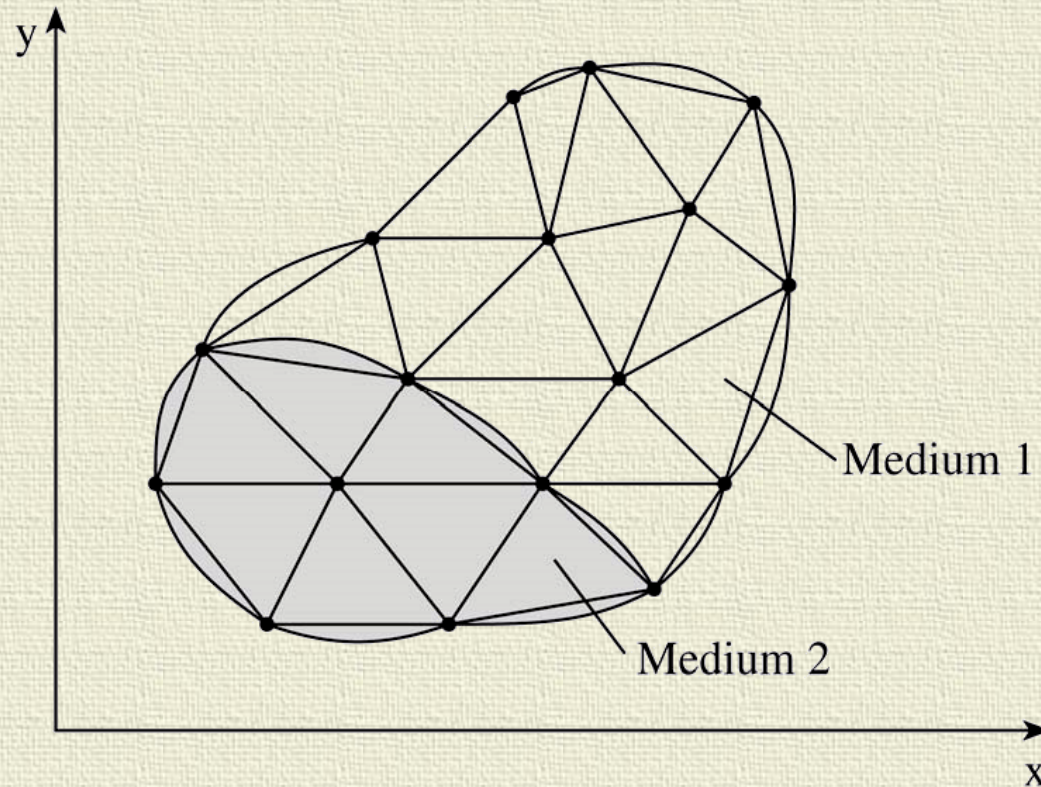
Gdzie

$$[V] = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ \vdots \\ V_n \end{bmatrix}$$

n jest liczbą węzłów, N jest liczbą elementów,

$[C]$ to tak zwana *globalna macierz współczynników* która jest zestawem macierzy współczynników indywidualnych elementów.

Równanie energii uzyskano dla założonej jednorodności regionu ($\epsilon = \text{const}$). Jeżeli region jest niejednorodny to dzieli się go na elementy tak w taki sposób aby każdy element skończony był jednorodny.



W takiej sytuacji, równanie

$$W_E = \frac{1}{2} \int \varepsilon |E_E|^2 dS = \frac{1}{2} \int \varepsilon |V_E|^2 dS$$

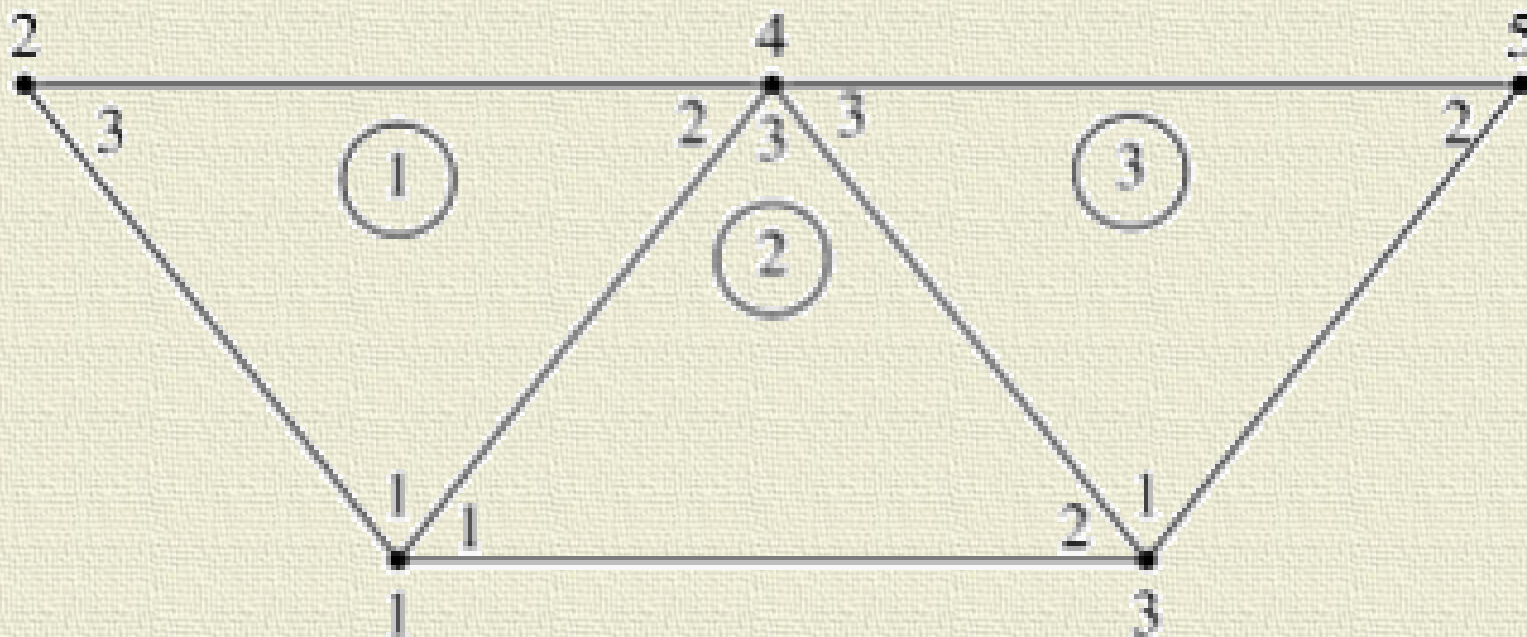
jest nadal obowiązujące, ale równanie

$$W_E = \frac{1}{2} \varepsilon [V_E]^T [C^E] [V_E]$$

nie może być stosowane ponieważ ε zmienia się od elementu do elementu.

By pokonać tę trudność trzeba zastąpić ε przez ε_0 , i pomnożyć funkcję podcałkową przez ε_r .

Proces składania macierzy współczynników w macierz globalną.
Niech siatka elementów skończonych składa się z trzech elementów.



Globalna macierz współczynników ma rozmiar 5x5 ponieważ siatka ma 5 węzłów ($n = 5$).

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$$

C_{ij} jest sprzężeniem między węzłami $i - j$. Wyznacza się C_{ij} wykorzystując fakt, że rozkład potencjału musi być ciągły na granicy międzyelementowej. Wkład w i, j wyrazu macierzy $[C]$ pochodzi od wszystkich elementów zawierających węzły i oraz j .

Na przykład: elementy 1 i 2 mają wspólny węzeł 1, stąd

$$C_{11} = C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)}$$

Węzeł 2 należy tylko do elementu 1, stąd

$$C_{22} = C_{33}^1$$

Węzeł 4 należy do elementów 1, 2, i 3; więc

$$C_{44} = C_{22}^1 + C_{33}^2 + C_{33}^3$$

Węzły 1 i 4 należą jednocześnie do elementów 1 i 2; stąd

$$C_{14} = C_{41} = C_{12}^1 + C_{13}^2$$

Ponieważ nie ma sprzężenia między węzłami 2 i 3,

$$C_{23} = C_{32} = 0$$

Kontynuując takie postępowanie - analizę siatki - można wyznaczyć wszystkie wyrazy globalnej macierzy współczynników

$$\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} C_{11}^{(1)} + C_{11}^{(2)} & C_{13}^{(1)} & C_{12}^{(2)} & C_{12}^{(1)} + C_{13}^{(2)} & 0 \\ C_{31}^{(1)} & C_{33}^{(1)} & 0 & C_{32}^{(1)} & 0 \\ C_{21}^{(2)} & 0 & C_{22}^{(2)} + C_{11}^{(3)} & C_{23}^{(2)} + C_{13}^{(3)} & C_{12}^{(3)} \\ C_{21}^{(1)} + C_{31}^{(2)} & C_{23}^{(1)} & C_{32}^{(2)} + C_{31}^{(3)} & C_{22}^{(1)} + C_{33}^{(2)} + C_{33}^{(3)} & C_{32}^{(3)} \\ 0 & 0 & C_{21}^{(3)} & C_{23}^{(3)} & C_{22}^{(3)} \end{bmatrix}$$

W globalnej macierzy współczynników [C] jest 27 wyrazów (9 dla każdego z 3 elementów)

Własności macierzy [C]

1. Symetria ($C_{ij} = C_{ji}$)
2. $C_{ij} = 0$ - brak sprzężenia między węzłami i i j - dla dużej liczby elementów [C] macierz ta jest zwykle rzadka.
3. Jeśli węzły są odpowiednio numerowane macierz [C] jest pasmowa. Można dowieść, że:

$$\sum_{i=1}^3 C_{ij}^{(e)} = 0 = \sum_{j=1}^3 C_{ij}^{(e)}$$

3. Macierz jest osobliwa. Chociaż nie jest to oczywiste można to udowodnić przy użyciu macierzy współczynników elementu.

Rozwiązanie równania falowego

Typowym równaniem falowym jest niejednorodne, skalarne równanie Helmholtz'a

$$\nabla^2 \Phi + k^2 \Phi = g$$

gdzie Φ jest szukaną wielkością polową (np. dla problemu falowodu, $\Phi = H_z$ lub E_z), g jest funkcją źródłową, i $k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$ jest liczbą falową środowiska.

Możliwe trzy przypadki szczególne:

$k = g = 0$ równanie Laplace'a

$k = 0$ równanie Poisson'a

$g = 0$ jednorodne, skalarne równanie Helmholtz'a

Rozwiązanie niejednorodnego równania falowego znajduje się minimalizując funkcjonal

$$I(\Phi) = \frac{1}{2} \iint \left[|\nabla \Phi|^2 - k^2 \Phi^2 + 2\alpha g \right] dS$$

Jeżeli muszą być spełnione inne niż „naturalne” warunki brzegowe (warunek Dirichlet’a albo jednorodny warunek Neumann’a) to odpowiednie warunki muszą być dodane do funkcjonału.

Potencjał Φ i funkcję źródłową g można wyrazić przy pomocy funkcji kształtu wewnątrz elementu trójkątnego

$$\Phi_E(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i \Phi_i \qquad g_E(x, y) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i g_{Ei}$$

gdzie Φ_{ei} and g_{Ei} są, odpowiednio, wartościami Φ i g w punkcie węzłowym i elementu E .

Dla pojedynczego elementu funkcjonal ma postać:

$$\begin{aligned}
 I(\Phi_E) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_{Ei} \Phi_{Ej} \iint \nabla \alpha_i \nabla \alpha_j dS - \frac{k^2}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_{Ei} \Phi_{Ej} \iint \alpha_i \alpha_j dS + \\
 &+ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \Phi_{Ei} g_{Ej} \iint \alpha_i \alpha_j dS = \\
 &= \frac{1}{2} [\Phi_E]^T [C^E] [\Phi_E] - \frac{k^2}{2} [\Phi_E]^T [T^E] [\Phi_E] + [\Phi_E]^T [T^E] [G_E]
 \end{aligned}$$

Równanie wyprowadzone dla pojedynczego elementu może być zastosowane do wszystkich N elementów w regionie rozwiązania.

$$I(\Phi) = \sum_{E=1}^N I(\Phi_E)$$

W postaci macierzowej:

$$I(\Phi) = \frac{1}{2}[\Phi]^T [C][\Phi] - \frac{k^2}{2}[\Phi]^T [T][\Phi] + [\Phi]^T [T][G]$$

gdzie: $[\Phi] = [\Phi_1, \Phi_2 \dots \Phi_N]^T$

$$[G] = [g_1, g_2 \dots g_N]^T$$

$[C]$, i $[T]$ są globalnymi macierzami zawierającymi odpowiednie macierze lokalne $[C^E]$ i $[T^E]$.

Rozpatrzmy przypadek specjalny, w którym funkcja źródłowa $g = 0$. Jeżeli najpierw są numerowane węzły o szukanym potencjale, a później o potencjale znanym, to można napisać

$$I = \frac{1}{2} [\Phi_F \Phi_P] \begin{bmatrix} C_{FF} & C_{FP} \\ C_{PF} & C_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_F \\ \Phi_P \end{bmatrix} - \frac{k^2}{2} [\Phi_F \Phi_P] \begin{bmatrix} T_{FF} & T_{FP} \\ T_{PF} & T_{PP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_F \\ \Phi_P \end{bmatrix}$$

Biorąc $\frac{\partial I}{\partial \Phi_F} = 0$

$$\begin{bmatrix} C_{FF} & C_{FP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_F \\ \Phi_P \end{bmatrix} - k^2 \begin{bmatrix} T_{FF} & T_{FP} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Phi_F \\ \Phi_P \end{bmatrix} = 0$$

Dla $\Phi_P = 0$ $\begin{bmatrix} C_{FF} & -k^2 T_{FF} \end{bmatrix} \Phi_F = 0$

Mnożąc lewą stronę przez $1/T_{FF}$ otrzymuje się

$$\left[T_{FF}^{-1} C_{FF} - k^2 I \right] \Phi_F = 0$$

Po podstawieniu

$$A = T_{FF}^{-1} C_{FF}, \quad k^2 = \lambda, \quad X = \Phi_F$$

otrzymuje się standardowy problem na wartości własne:

$$(A - \lambda I) X = 0$$

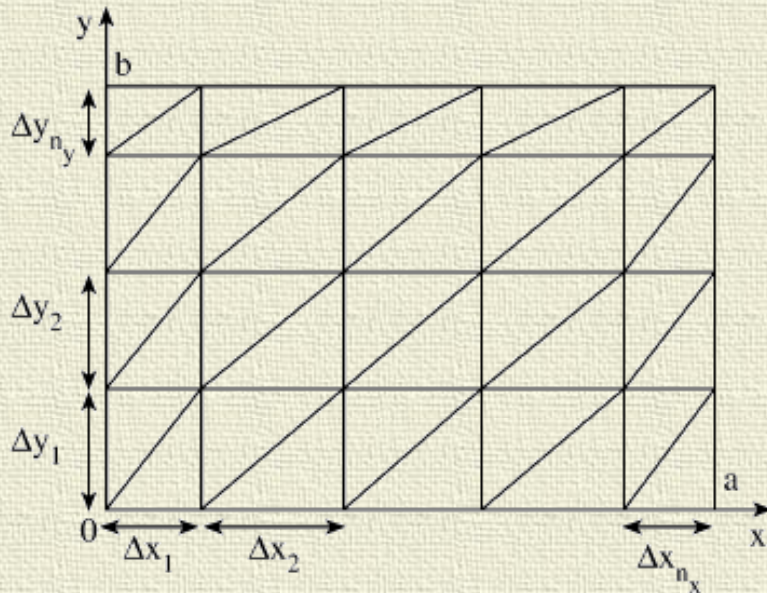
gdzie I jest macierzą jednostkową.

Do wyznaczenia konkretnej lub wszystkich wartości własnych $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n_f}$ i wektorów własnych $X_1, X_2, \dots, X_{n_f}$, gdzie n_f jest liczbą węzłów o szukanym potencjale mogą być zastosowane dowolne procedury standardowe.

Automatyczna generacja siatki

Najprostszy generator siatki dla obszarów prostokątnych.

Jednym z bardziej czasochłonnych problemów w stosowaniu FEM jest przygotowanie danych. Wydajne programy FEM muszą dysponować schematem generowania węzłów i elementów nazywanym generatorem siatki (*mesh generator*). Automatyczna generacja siatki minimalizuje dane wejściowe wymagane do opisanie problemu, redukuje czas potrzebny na przygotowanie danych, eliminuje błędy człowieka. Kombinacja programu automatycznej generacji siatki z grafiką komputerową jest szczególnie cenna ponieważ wynik może być monitorowany wizualnie.



Prostokątny region rozwiązania ma wymiary $a \times b$ jak na rysunku.

Celem jest podział regionu na elementy prostokątne, z których każdy następnie zostanie podzielony na dwa elementy trójkątne.

Niech n_x i n_y są liczbami podziałów w kierunkach x i y . Całkowite liczby elementów n_e i węzłów n_d są:

$$n_e = 2n_x n_y$$

$$n_d = (n_x + 1)(n_y + 1)$$

W celu znalezienia globalnych współrzędnych (x, y) dla każdego węzła, potrzebna jest tablica zawierająca $\Delta x_i, i = 1, 2, \dots, n_x$ i $\Delta y_j, j = 1, 2, \dots, n_y$ odległości między węzłami w kierunkach x i y .

Jeśli kolejność numerowania węzłów biegnie od lewej do prawej wzdłuż poziomych rzędów i od dołu ku górze wzdłuż pionowych rzędów, to pierwszym węzłem jest początek układu $(0,0)$. Następny węzeł otrzymamy gdy $x \rightarrow x + \Delta x_1$ a $y = 0$ pozostaje niezmieniony. Następny węzeł ma $x \rightarrow x + \Delta x_2, y = 0$, i tak dalej aż Δx_i zostaną wyczerpane. Następny, drugi poziomy rząd rozpoczyna się od $x = 0, y \rightarrow y + \Delta y_1$ i x rośnie dopóki nie wyczerpią się Δx_i . Proces ten jest powtarzany aż do osiągnięcia ostatniego węzła $(n_x + 1)(n_y + 1)$ tzn., kiedy Δx_i i Δy_i są wyczerpane jednocześnie.

Prezentowana procedura pozwala na generację jednorodnej i niejednorodnej siatki. Siatka jest jednorodna jeżeli wszystkie Δx_i są równe i wszystkie Δy_i są równe; w przeciwnym przypadku jest niejednorodna.

Preferowana jest siatka niejednorodna jeśli z góry wiadomo, że szukany parametr zmienia się gwałtownie w określonych częściach regionu rozwiązania. Siatka taka pozwala skoncentrować relatywnie małe elementy w rejonie gwałtownych zmian parametru. Rejony takie są często przedmiotem największego zainteresowania. Gdy brak wstępnej wiedzy o szybkich zmianach szukanego parametru, może być użyta siatka jednorodna. W takim przypadku

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = h_x$$

$$\Delta y_1 = \Delta y_2 = \dots = h_y$$

gdzie $h_x = a/n_x$ i $h_y = b/n_y$.

W niektórych przypadkach potrzebna jest również lista węzłów o określonym potencjale. Jeżeli założyć, że wszystkie punkty graniczne mają określony potencjał, to liczba n_p określonych węzłów jest

$$n_p = 2(n_x + n_y)$$

Prostą drogą uzyskania takiej listy punktów granicznych jest ponumerowanie punktów na dolnej, prawej, górnej i lewej krawędziach prostokątnego regionu, w takiej właśnie kolejności.

Procedurę generującą jednorodną lub niejednorodną siatkę w regionie prostokątnym można łatwo zaprogramować. Jeśli potrzebna jest siatka jednorodna, to wymaganymi parametrami wejściowymi będą a , b , n_x , i n_y . Jeżeli wymagana jest siatka niejednorodna potrzebne będą dane: n_x , n_y , Δx_i , $i = 1, 2, \dots, n_x$ i Δy_j , $j = 1, 2, \dots, n_y$. Wyjściowymi parametrami będą n_e , n_d , n_p , lista połączeń, globalne współrzędne (x, y) każdego węzła, i lista określonych (o znanym potencjale) węzłów.

Dla regionów o złożonych (dowolnych) kształtach istnieje wiele opisanych w literaturze algorytmów o różnym stopniu automatyzacji.

Podstawowe kroki algorytmów:

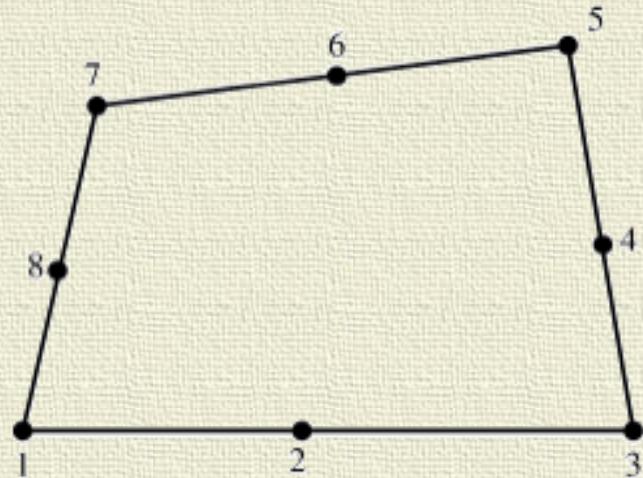
- podział regionu rozwiązania na kilka czworokątnych bloków,
- oddzielny podział bloków na elementy,
- połączenie poszczególnych bloków.

Definicja bloków

Region rozwiązania jest dzielony na czworokątne bloki. Poddomeny o różnych parametrach konstytutywnych (σ , ε , μ) muszą być reprezentowane przez oddzielne bloki. Jako dane wejściowe podaje się topologię bloku i współrzędne ośmiu punktów opisujących każdy blok. Czyli każdy blok reprezentuje ośmio-węzłowy kwadratowy, izoparametryczny element. W naturalnym układzie współrzędnych (ζ , η), współrzędne x i y są

$$x(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \alpha_i(\xi, \eta) x_i$$

$$y(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^8 \alpha_i(\xi, \eta) y_i$$



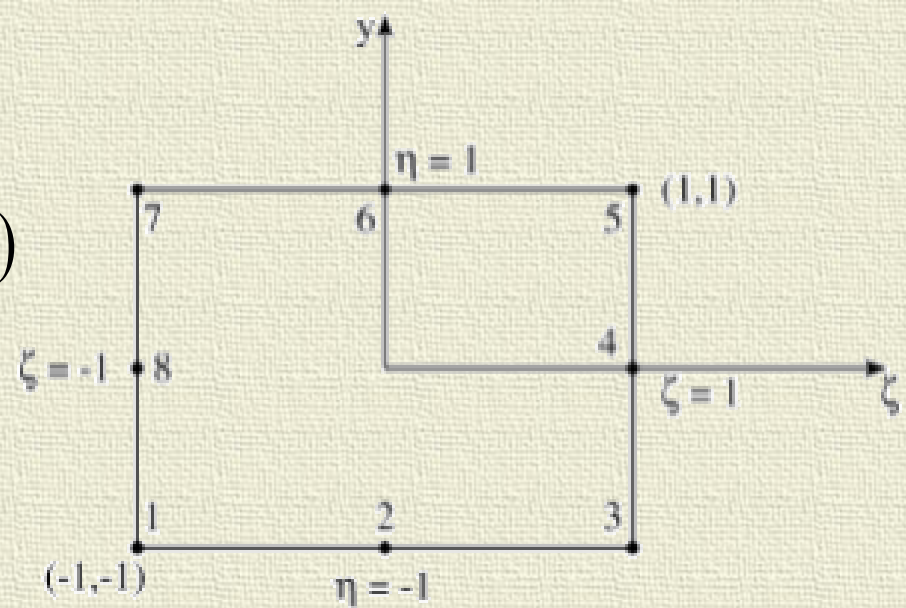
gdzie $\alpha_i(\xi, \eta)$ jest funkcją kształtu i , a (x_i, y_i) są współrzędnymi węzła i definiującymi granicę czworokątnego bloku.

Funkcje kształtu dla narożnych węzłów

$$\alpha_i = \frac{1}{4}(1 + \xi\xi_i)(1 + \eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + 1)$$

$$i = 1, 3, 5, 7$$

i dla węzłów środkowych boku



$$\alpha_i = \frac{1}{2} \xi_i^2 (1 + \xi\xi_i)(1 + \eta^2) + \frac{1}{2} \eta_i^2 (1 + \eta\eta_i + 1)(1 - \xi^2) \quad i = 2, 4, 6, 8$$

Własności funkcji kształtu

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i(\xi, \eta) = 1$$

$$\alpha_i(\xi_i, \eta_i) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Są kwadratowe wzdłuż krawędzi elementów ($\xi = \pm 1$, $\eta = \pm 1$).

Podział bloków

Dla każdego bloku określa się $N_{DIV\ X}$ i $N_{DIV\ Y}$, liczbę elementów podziału w kierunku ξ i η . Określa się również współczynniki wagowe $(W_\xi)_i$ i $(W_\eta)_i$ pozwalające stopniować siatkę w bloku. Określając te parametry trzeba zapewnić zgodność podziałów na połączeniach sąsiednich bloków.

Naturalne współrzędne są powiększane odpowiednio do wartości

$$\begin{aligned}\xi_i &= \xi_i + \frac{2(W_\xi)_i}{W_\xi^T F} & \text{gdzie} & & W_\xi^T &= \sum_{j=1}^{NDIVX} (W_\xi)_j \\ \eta_i &= \eta_i + \frac{2(W_\eta)_i}{W_\eta^T F} & & & W_\eta^T &= \sum_{j=1}^{NDIVX} (W_\eta)_j\end{aligned}$$

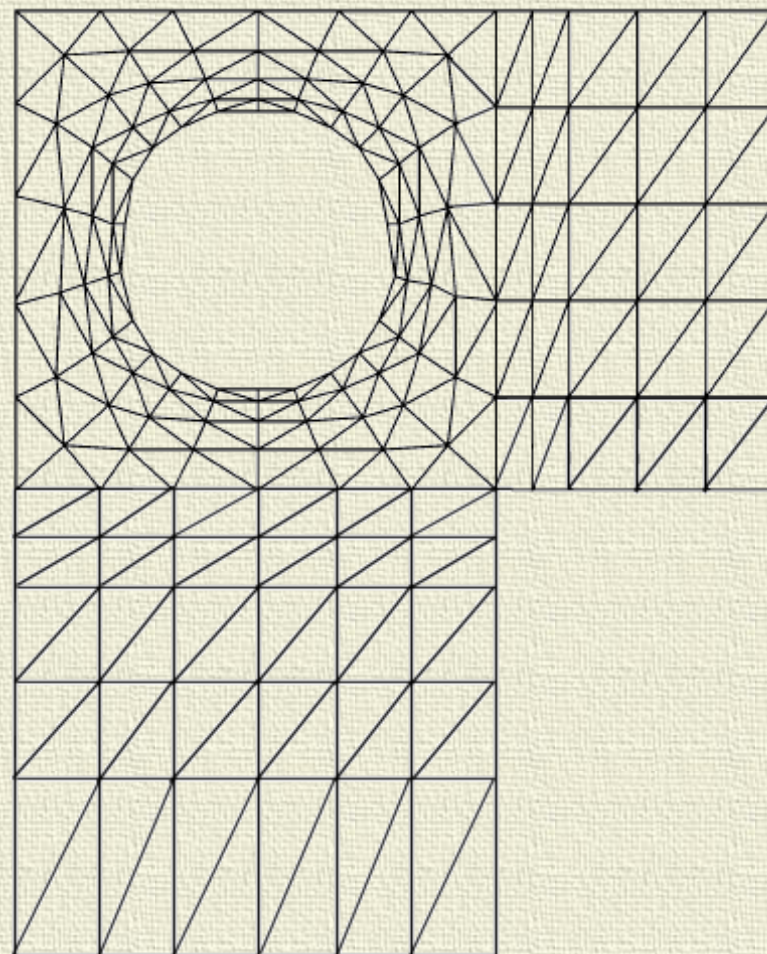
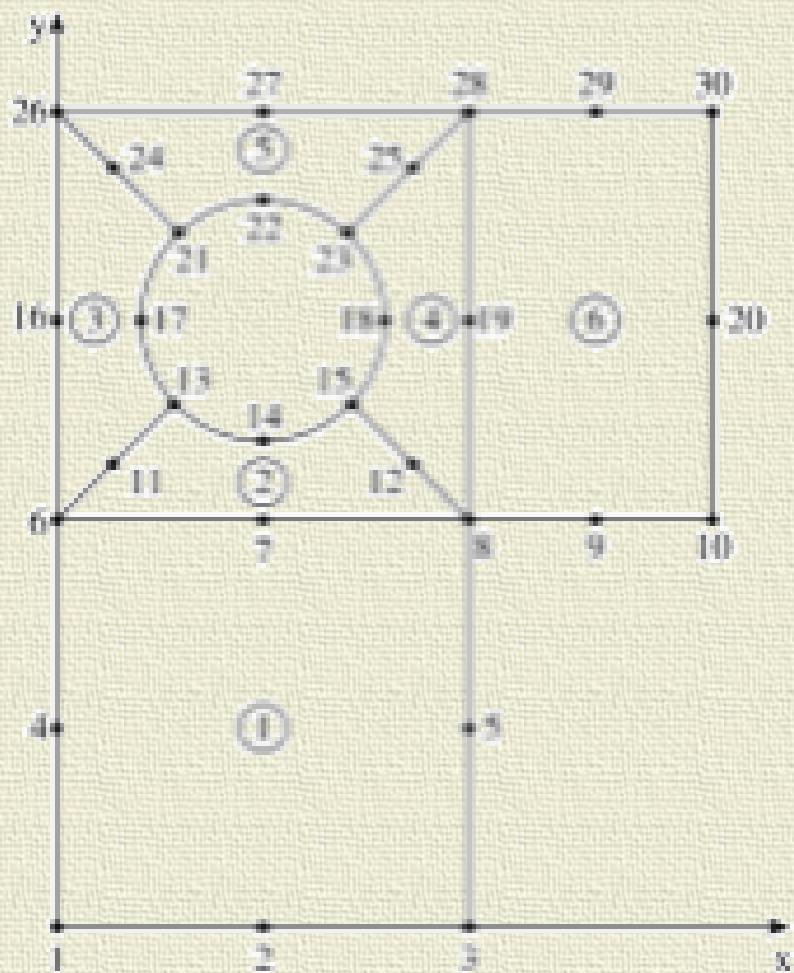
$$F = \begin{cases} 1 & \text{dla elementów liniowych} \\ 2 & \text{dla elementów kwadratowych} \end{cases}$$

Dopuszczalne są trzy typy elementów:

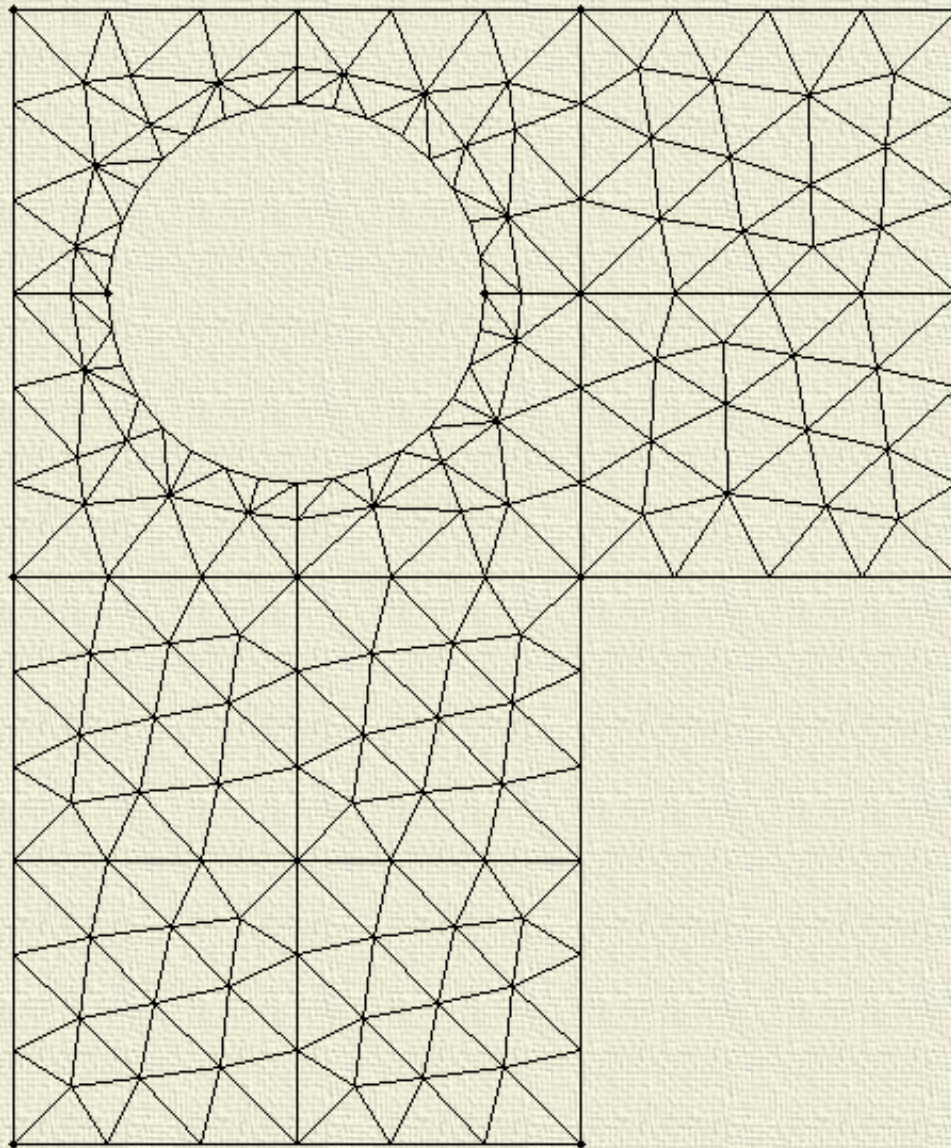
- (a) liniowe, czterowęzłowe, czworokątne,
- (b) liniowe, trójwęzłowe, trójkątne,
- (c) kwadratowe, ośmiowęzłowe, izoparametryczne.

Po podzieleniu każdego bloku i oddzielnym ponumerowaniu jego punktów węzłowych należy połączyć bloki i ponumerować węzły unikalnie (jednoznacznie). Jest to osiągnięte przez porównanie współrzędnych wszystkich punktów węzłowych i przyporządkowanie tego samego numeru wszystkim węzłom o identycznych współrzędnych. Tzn. porównuje się współrzędne węzła 1 z współrzędnymi wszystkich pozostałych węzłów, następnie węzła 2 z współrzędnymi wszystkich pozostałych węzłów, itd. Aż wszystkie powtarzające się węzły zostaną wyeliminowane.

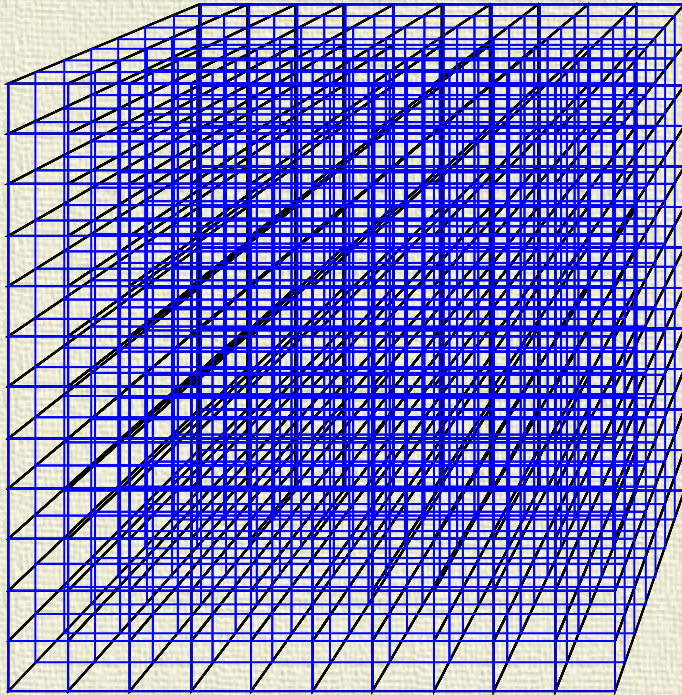
Wynik zastosowania takiej procedury



Siatka generowana automatycznie w programie QuickField

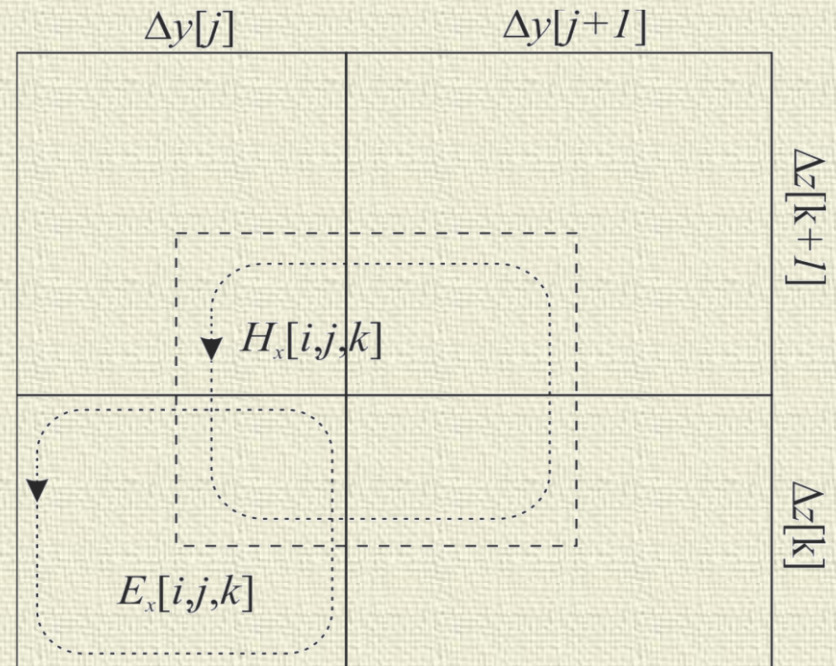


Całkowa postać równań Maxwella w metodzie MES



$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = - \iint dA \mu \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{H} \cdot \mathbf{n})$$

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint dA \left[\varepsilon \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}) + \mathbf{J}_0 + \sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \right]$$



$$\begin{aligned}
IntH_x^{n+1/2}[i, j, k] = & \left\{ H_y^{n+1/2}[i-1, j-1, k-1] + H_y^{n+1/2}[i, j-1, k-1] + \right. \\
& + H_y^{n+1/2}[i-1, j, k-1] + H_y^{n+1/2}[i, j, k-1] - H_y^{n+1/2}[i, -1j, k] + \\
& - H_y^{n+1/2}[i, j, k] - H_y^{n+1/2}[i-1, j-1, k] - H_y^{n+1/2}[i, j-1, k] \left. \right\} \Delta y[j] / 4 + \\
& + \left\{ H_z^{n+1/2}[i-1, j, k-1] + H_z^{n+1/2}[i, j, k-1] + H_z^{n+1/2}[i-1, j, k] + \right. \\
& + H_z^{n+1/2}[i, j, k] - H_z^{n+1/2}[i-1, j-1, k] - H_z^{n+1/2}[i, j-1, k] + \\
& - H_z^{n+1/2}[i-1, j-1, k-1] - H_z^{n+1/2}[i, j-1, k-1] \left. \right\} \Delta z[k] / 4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
IntE_x^n[i, j, k] = & \left\{ E_y^n[i, j, k] + E_y^n[i+1, j, k] + E_y^n[i, j+1, k] + \right. \\
& + E_y^n[i+1, j+1, k] - E_y^n[i, j, k+1] - E_y^n[i+1, j, k+1] + \\
& - E_y^n[i, j+1, k+1] - E_y^n[i+1, j+1, k+1] \left. \right\} \Delta y[j] / 4 + \\
& + \left\{ E_z^n[i, j+1, k] + E_z^n[i+1, j+1, k] + E_z^n[i, j+1, k+1] + \right. \\
& + E_z^n[i+1, j+1, k+1] + E_z^n[i, j, k] - E_z^n[i+1, j, k] + \\
& - E_z^n[i, j, k+1] - E_z^n[i+1, j, k+1] \left. \right\} \Delta z[k] / 4
\end{aligned}$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}[i, j, k] = H_x^{n-\frac{1}{2}}[i, j, k] - \frac{\Delta t}{MuA_x} IntE_x^n[i, j, k]$$

gdzie

$$MuA_x = \frac{1}{8} \left[\left(\mu[i, j, k] + \mu[i+1, j, k] \right) \Delta y[j] \Delta z[k] + \right. \\ \left(\mu[i, j+1, k] + \mu[i+1, j+1, k] \right) \Delta y[j+1] \Delta z[k] + \\ \left(\mu[i, j, k+1] + \mu[i+1, j, k+1] \right) \Delta y[j] \Delta z[k+1] + \\ \left. \left(\mu[i, j+1, k+1] + \mu[i+1, j+1, k+1] \right) \Delta y[j+1] \Delta z[k+1] \right]$$

Krok czasowy musi spełniać kryterium Couranta

$$\Delta t \leq \min \left(\frac{\Delta x[i]}{v[i]}, \frac{\Delta y[j]}{v[j]}, \frac{\Delta z[k]}{v[k]} \right)$$

FDTD

finite differential time domain

metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu

Równania Maxwella

Równania Maxwella mogą mieć postać zarówno różniczkową jak i całkową. Metoda FDTD bazuje na formie różniczkowej

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \nabla \times \vec{H} - \vec{J} & \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} &= \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} - \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A} \\ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= -\nabla \times \vec{E} - \vec{M} & \frac{\partial}{\partial t} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{S} &= -\oint_l \vec{E} \cdot d\vec{l} - \iint_A \vec{M} \cdot d\vec{A}\end{aligned}$$

Ośrodek musi być:

- liniowy
- izotropowy
- bezdyspersyjny

Założenia te pozwalają na posługiwanie się relacjami:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \sigma \text{ in } [S / m] \quad \vec{M} = \sigma^* \vec{H} \quad \sigma^* \text{ in } [\Omega / m]$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{\sigma^*}{\mu} \vec{H}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{E}$$

We współrzędnych kartezjańskich

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_x}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right) & \frac{\partial H_x}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - \sigma^* H_x \right) \\ \frac{\partial E_y}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y \right) & \frac{\partial H_y}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sigma^* H_y \right) \\ \frac{\partial E_z}{\partial t} &= \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z \right) & \frac{\partial H_z}{\partial t} &= -\frac{1}{\mu} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - \sigma^* H_z \right)\end{aligned}$$

Aproksymacja różnicami skończonymi
wykorzystuje szereg Taylora

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x}) \cdot (x - \hat{x}) + \frac{f''(\hat{x})}{2!} \cdot (x - \hat{x})^2 + \frac{f'''(\hat{x})}{3!} \cdot (x - \hat{x})^3 + \dots$$

$$u(x_i + \Delta x)|_{t_n} = u|_{x_i, t_n} + \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i, t_n} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} + \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_i, t_n} + \dots$$

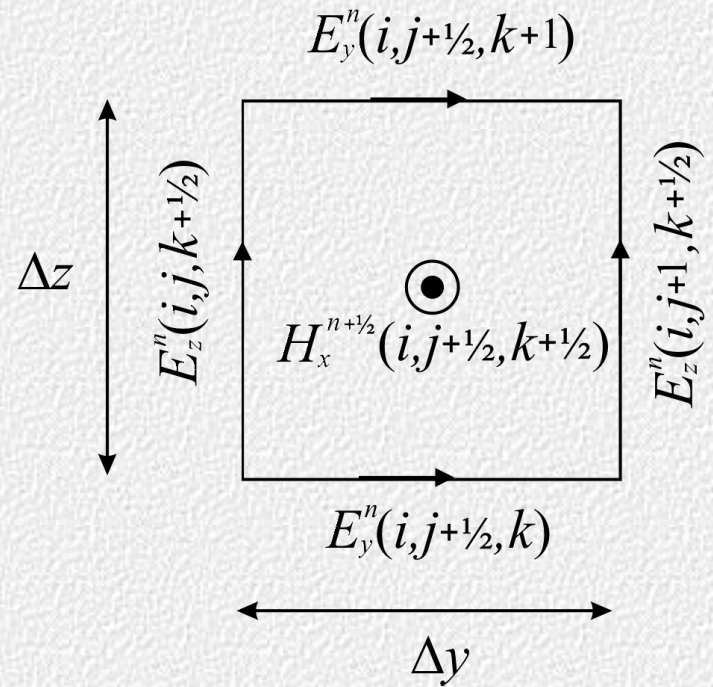
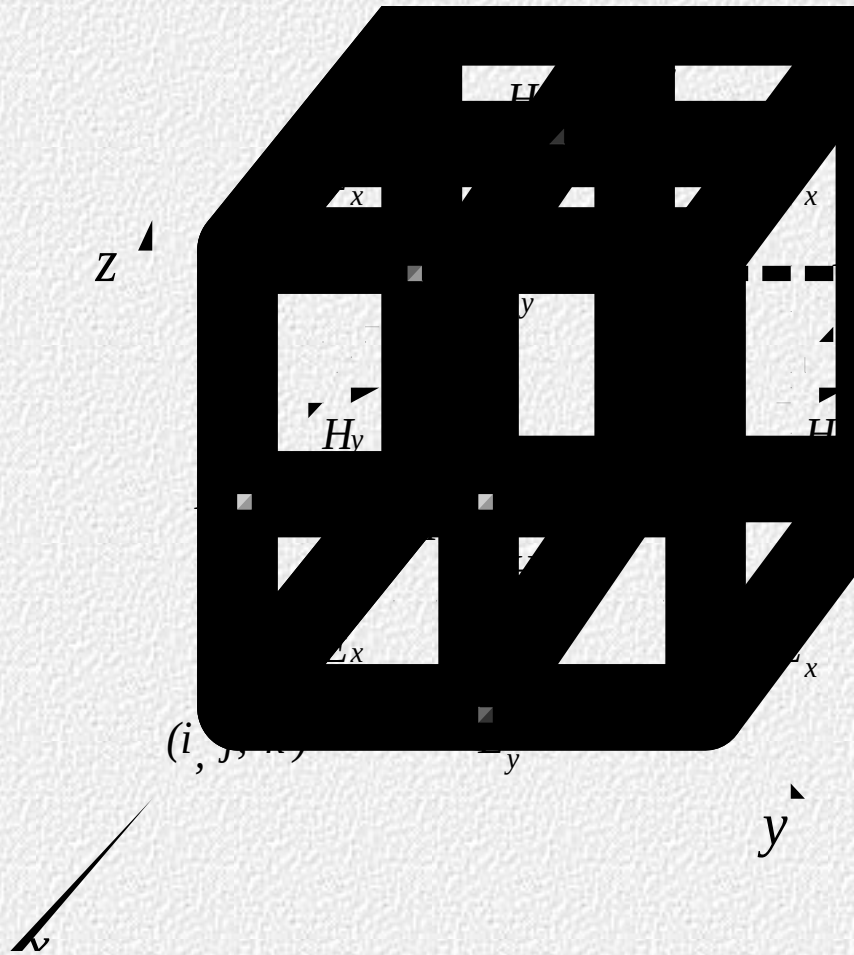
$$u(x_i - \Delta x)|_{t_n} = u|_{x_i, t_n} - \Delta x \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x_i, t_n} + \frac{\Delta x^2}{2} \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x_i, t_n} - \frac{\Delta x^3}{6} \left. \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right|_{x_i, t_n} + \dots$$

co daje

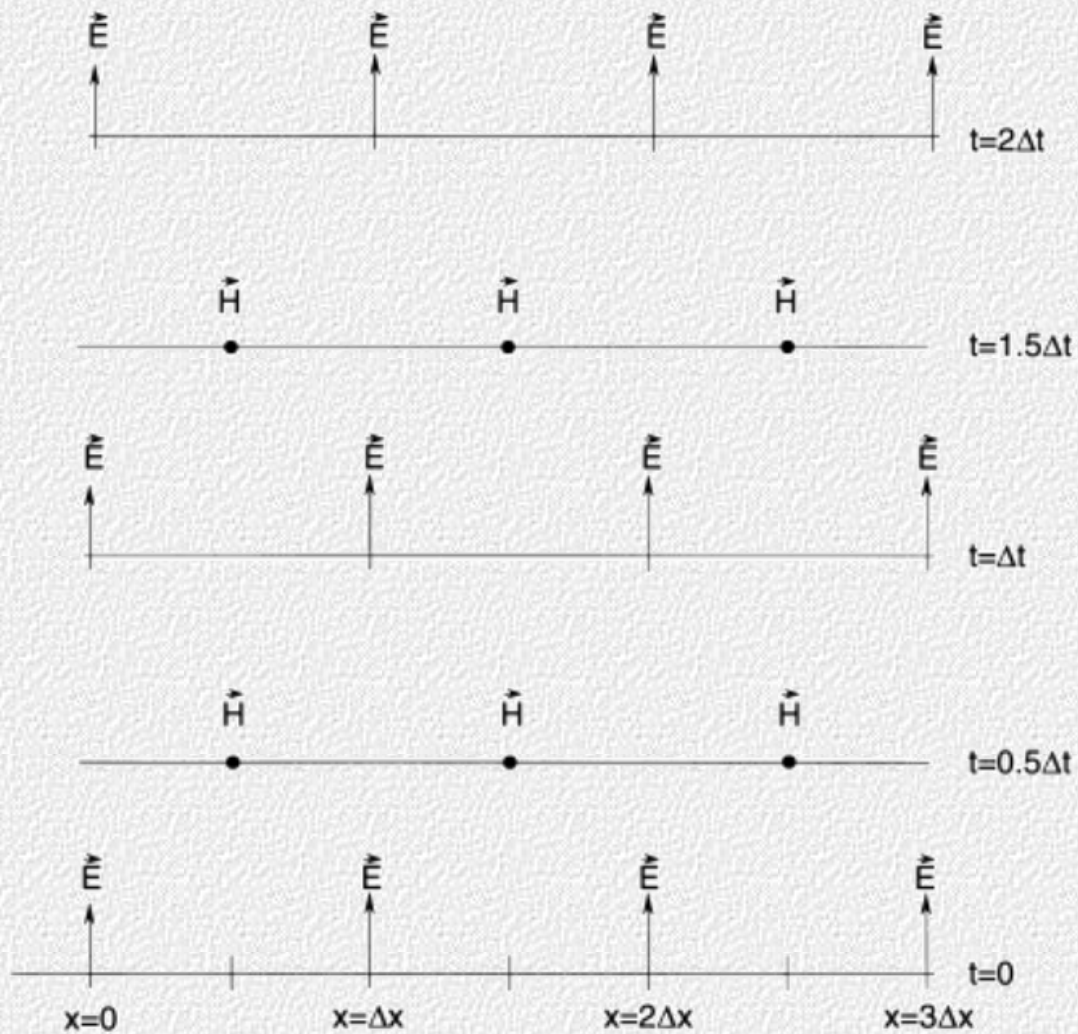
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_i + \Delta x) - u(x_i - \Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

dokładność!

Komórka Yee



Krok czasowy Yee



Notacja

$$u_X(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u_{X_{i,j,k}}^n$$

$$\frac{\partial u_X}{\partial x} \cong \frac{u_{X_{i+\frac{1}{2},j,k}}^n - u_{X_{i-\frac{1}{2},j,k}}^n}{\Delta x}$$

FDTD - równania Maxwella w 3D

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x \right)$$

$$\begin{aligned} & \frac{E_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n+1/2} - E_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n-1/2}}{\Delta t} = \\ & = \frac{1}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}} \left(\frac{H_{Z_{i,j+1,k+1/2}}^n - H_{Z_{i,j,k+1/2}}^n}{\Delta y} - \frac{H_{Y_{i,j+1/2,k+1}}^n - H_{Y_{i,j+1/2,k}}^n}{\Delta z} - \sigma_{i,j+1/2,k+1/2} E_{X_{i,j,k}}^{n+\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

stosując przybliżenie

$$E_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}^n = \frac{E_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n+1/2} + E_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}^{n-1/2}}{2}$$

otrzymuje się

$$E_{X_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon}} \cdot E_{X_{i,j,k}}^n + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon}} \cdot \left(\frac{H_{Z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}^n - H_{Z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^n}{\Delta y} - \frac{H_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}}^n - H_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^n}{\Delta z} \right)$$

zaś stosując jednakowe kroki przestrzenne

$$E_{X_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon}} \cdot E_{X_{i,j,k}}^n + \frac{\frac{\Delta t}{\varepsilon}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \Delta t}{2\varepsilon}} \cdot \left(H_{Z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}}^n - H_{Z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}^n - H_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}}^n + H_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k}}^n \right) \left(\frac{1}{\Delta s} \right)$$

$$E_x^{n+1}(i+\frac{1}{2},j,k)=1-\frac{\sigma(i+\frac{1}{2},j,k)}{\varepsilon(i+\frac{1}{2},j,k)}E_x^n(i+\frac{1}{2},j,k)+$$

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon(i+\frac{1}{2},j,k)\delta}\left[H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j-\frac{1}{2},k)+\right.$$

$$\left.+H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k-\frac{1}{2})-H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})\right]$$

$$E_y^{n+1}(i,j+\frac{1}{2},k)=1-\frac{\sigma(i,j+\frac{1}{2},k)}{\varepsilon(i,j+\frac{1}{2},k)}E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)+$$

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j+\frac{1}{2},k)\delta}\left[H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2})+\right.$$

$$\left.+H_z^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)-H_z^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)\right]$$

$$E_z^{n+1}(i,j,k+\frac{1}{2})=1-\frac{\sigma(i,j,k+\frac{1}{2})}{\varepsilon(i,j,k+\frac{1}{2})}E_z^n(i,j,k+\frac{1}{2})+$$

$$\frac{\Delta t}{\varepsilon(i,j,k+\frac{1}{2})\delta}\left[H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})-H_y^{n+\frac{1}{2}}(i-\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})+\right.$$

$$\left.+H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})-H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})\right]$$

$$H_x^{n+\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})=H_x^{n-\frac{1}{2}}(i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2})+$$

$$+\frac{\Delta t}{\mu\delta}\left[E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k+1)-E_y^n(i,j+\frac{1}{2},k)+\right.$$

$$\left.E_z^n(i,j,k+\frac{1}{2})-E_z^n(i,j+1,k+\frac{1}{2})\right]$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})=H_y^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j,k+\frac{1}{2})+$$

$$+\frac{\Delta t}{\mu\delta}\left[E_x^n(i+1,j,k+\frac{1}{2})-E_y^n(i,j,k+\frac{1}{2})+\right.$$

$$\left.E_z^n(i+\frac{1}{2},j,k)-E_z^n(i+\frac{1}{2},j,k+1)\right]$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)=H_z^{n-\frac{1}{2}}(i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k)+$$

$$+\frac{\Delta t}{\mu\delta}\left[E_x^n(i+\frac{1}{2},j+1,k)-E_y^n(i+\frac{1}{2},j,k)+\right.$$

$$\left.E_z^n(i,j+\frac{1}{2},k)-E_z^n(i+1,j+\frac{1}{2},k)\right]$$

FDTD – 2D

W 2D istnieją tylko mody – TM i TE

Mody te nie oddziałują na siebie

Kiedy przestrzeń jest liniowa, izotropowa i bezdyspersyjna mody te mogą być rozpatrywane oddzielnie

W 2D

$$H_{X_{i-\frac{1}{2},j+1}}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2},j+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2},j+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}} \cdot H_{X_{i-\frac{1}{2},j+1}}^n + \frac{\frac{\Delta t}{\Delta s \mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}}{1 + \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2},j+1}^* \Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}} \cdot \left(E_{Z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{Z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}} \cdot H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^n + \frac{\frac{\Delta t}{\Delta s \mu_{i,j+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2}}^* \Delta t}{2\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}} \cdot \left(E_{Z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} - E_{Z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} \right)$$

$$E_{Y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^* \Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^* \Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}} \cdot H_{Y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^n + \frac{\frac{\Delta t}{\Delta s \mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}^* \Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}} \cdot \left(H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^n - H_{Y_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^n + H_{X_{i-\frac{1}{2},j}}^n - H_{X_{i-\frac{1}{2},j+1}}^n \right)$$

Stabilność – kryterium Couranta

$$\Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2}}} \quad \Delta t \leq \frac{1}{c \sqrt{\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} + \frac{1}{(\Delta z)^2}}}$$

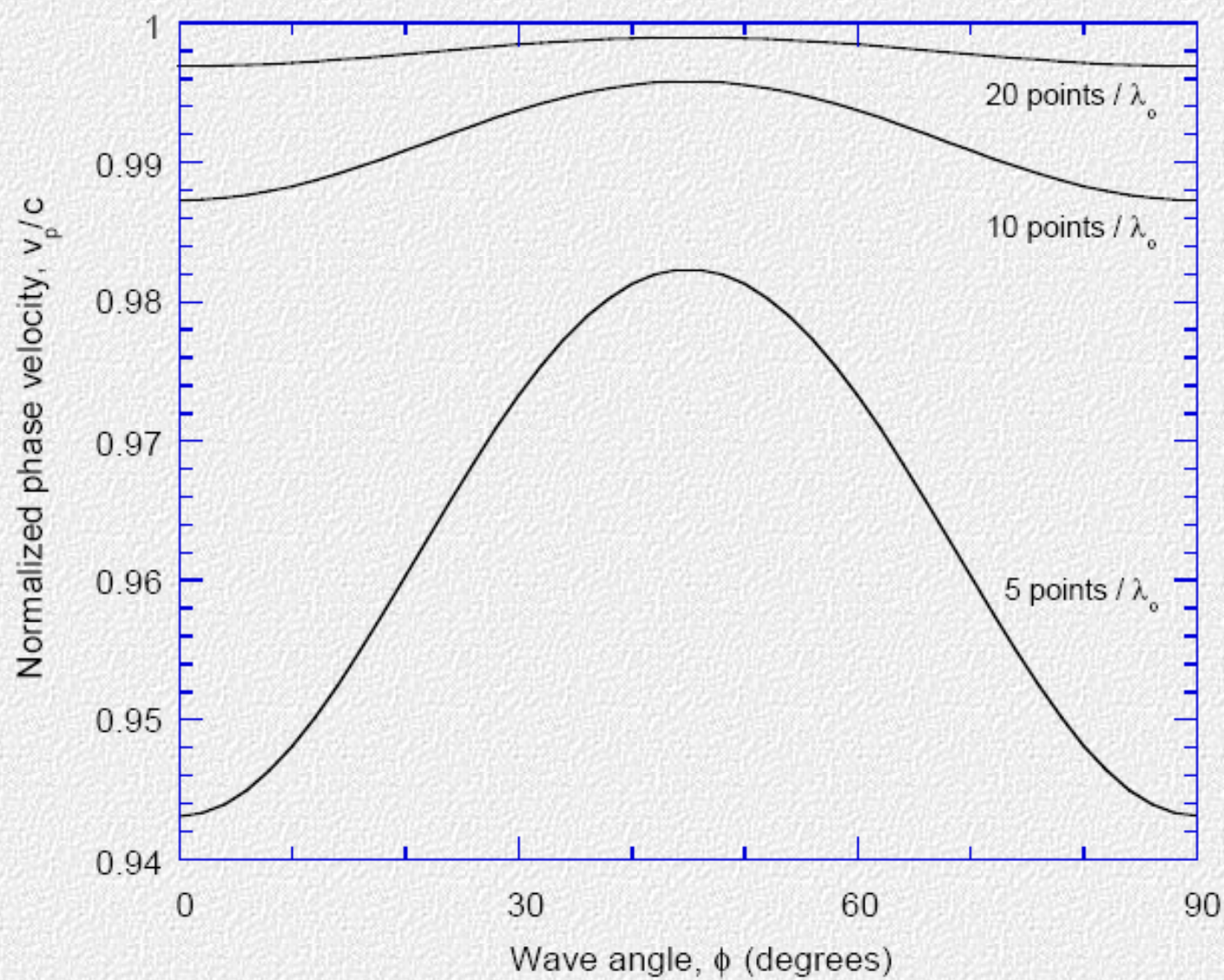
$$\Delta t \leq \frac{\Delta s}{c\sqrt{2}} \quad \Delta t \leq \frac{\Delta s}{c\sqrt{3}}$$

Dyspersja numeryczna (2D)

$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\left(\frac{1}{\Delta x} \right) \sin\left(\frac{\tilde{k}_x \Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\Delta y} \right) \sin\left(\frac{\tilde{k}_y \Delta y}{2}\right) \right]^2$$

$$\left[\frac{\Delta s}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \sin^2\left(\frac{\Delta s \cdot \tilde{k} \cdot \cos(\alpha)}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta s \cdot \tilde{k} \cdot \sin(\alpha)}{2}\right)$$

$$\tilde{k}_x = \tilde{k} \cdot \cos(\alpha), \quad \tilde{k}_y = \tilde{k} \cdot \sin(\alpha)$$



- najmniejszy błąd przy kącie padania 45°
- największy błąd przy 0° i 90° (wzdłuż osi).
- błąd maleje z kwadratem liczby kroków przestrzennych przypadających na długość fali

Magiczny krok czasowy (przykład 3D)

najdłuższy dopuszczalny krok czasowy dla określonego kąta propagacji

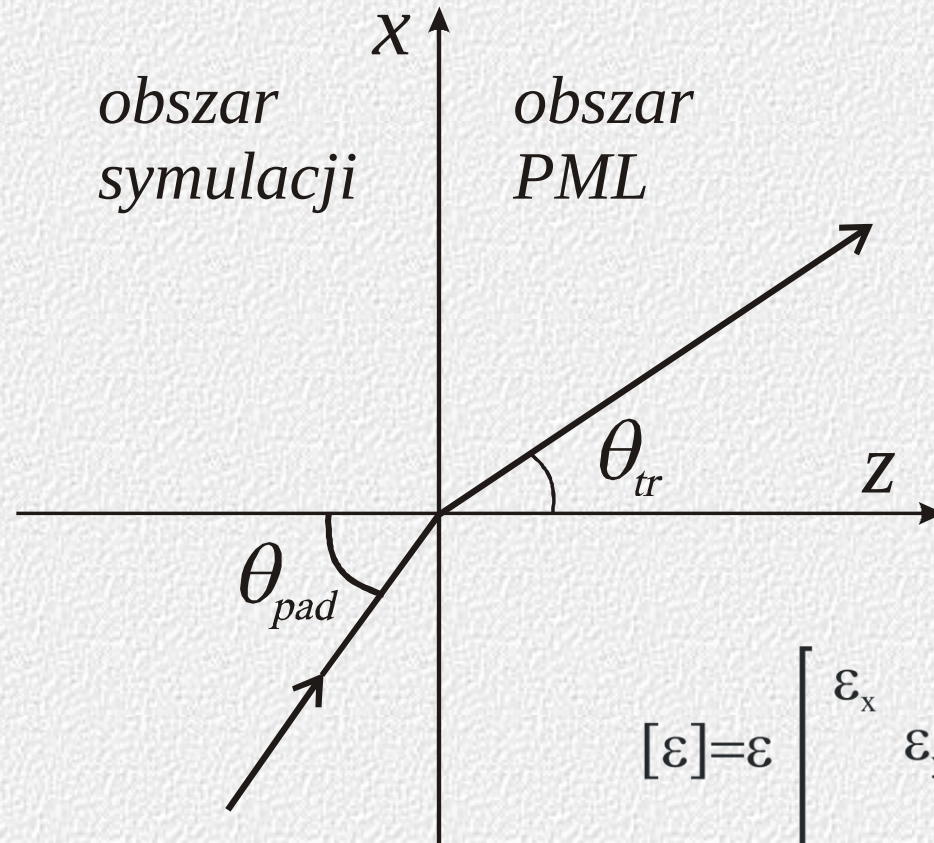
$$\left[\frac{1}{c\Delta t} \sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right) \right]^2 = \left[\left(\frac{1}{\Delta x}\right) \sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right) \right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\Delta y}\right) \sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right) \right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\Delta z}\right) \sin\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right) \right]^2$$

$$\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = \tilde{k} / \sqrt{3} \quad \text{jeśli} \quad \Delta t = \Delta s / c\sqrt{3}$$

ABC (Absorbing boundary conditions)

- często potrzeba symulować wycinek przestrzeni nieskończonej
- nie można symulować dowolnie dużej przestrzeni
- nie można „byle jak” zakończyć obszaru symulacji

PML



$$[\varepsilon] = \varepsilon \begin{bmatrix} \varepsilon_x & & \\ & \varepsilon_y & \\ & & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_M] = \mu \begin{bmatrix} \sigma_{Mx} & & \\ & \sigma_{My} & \\ & & \sigma_{Mz} \end{bmatrix}$$

$$[\mu] = \mu \begin{bmatrix} \mu_x & & \\ & \mu_y & \\ & & \mu_z \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_E] = \mu \begin{bmatrix} \sigma_{Ex} & & \\ & \sigma_{Ey} & \\ & & \sigma_{Ez} \end{bmatrix}$$

Fale dla składnika TE

$$\mathbf{E}_{pad}(r) = E_{pad} e^{-ik_0(\sin\theta_{pad}x + \cos\theta_{pad}z)}$$

$$\mathbf{E}_{tr}(r) = T^{TE} E_{pad} e^{-ik_0(\sqrt{\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}\sin\theta_{tr}x + \sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}}\cos\theta_{tr}z)}$$

$$\mathbf{E}_{odb}(r) = R^{TE} E_{pad} e^{-ik_0(\sin\theta_{pad}x + \cos\theta_{pad}z)}$$

z warunków ciągłości $1 + R^{TE} = T^{TE}$

$$\sqrt{\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}}\sin\theta_{tr} = \sin\theta_{pad} \quad \cos\theta_{pad} - R^{TE}\cos\theta_{tr} = T^{TE}\sqrt{\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}\cos\theta_{tr}$$

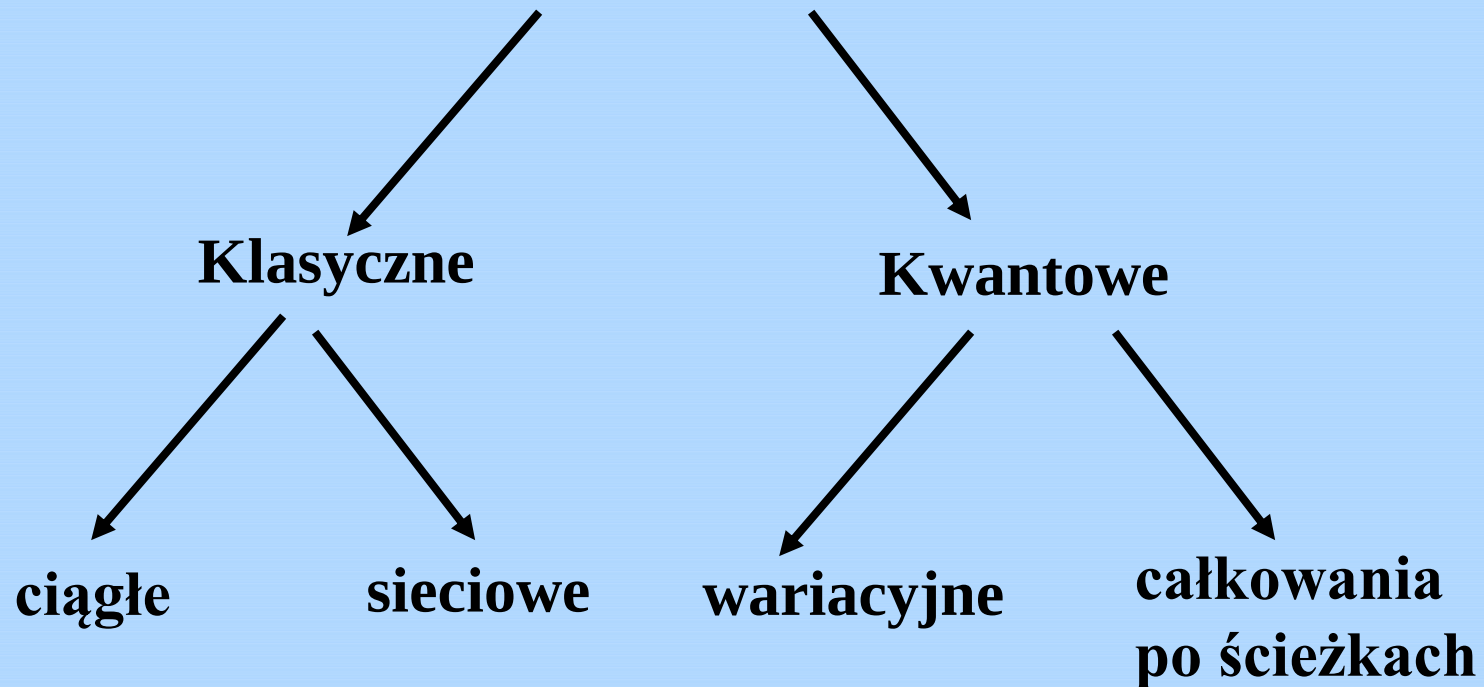
współczynnik odbicia
$$R^{TE} = \frac{\cos\theta_{pad} - \sqrt{\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}\cos\theta_{tr}}{\cos\theta_{pad} + \sqrt{\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}\cos\theta_{tr}}$$

$$R^{TE} = 0 \quad \text{dla} \quad \theta_{pad} = \theta_{tr} \quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}^{-1}$$

Metoda Monte Carlo



Symulacje Monte Carlo (MC)



Metoda Monte Carlo (MC) jest stosowana do modelowania matematycznego procesów zbyt złożonych, aby można było przewidzieć ich wyniki za pomocą podejścia analitycznego.

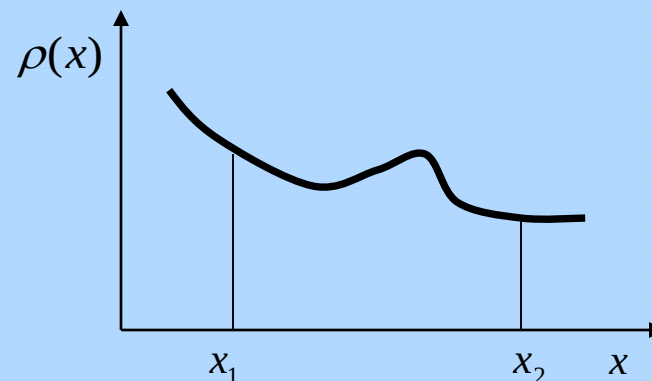
Należą do nich całki oraz łańcuchy stochastyczne. Istotną rolę w metodzie MC odgrywa losowanie (**wybór przypadkowy**) wielkości charakteryzujących proces, przy czym losowanie dokonywane jest zgodnie z rozkładem, który musi być znany.

Symulacje Monte Carlo wykonywane są wówczas gdy problem fizyczny można sprowadzić do rozwiązania całki typu.

$$F = \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx$$

Po wprowadzeniu funkcji rozkładu gęstości rozkładu prawdopodobieństwa $\rho(x)$

$$F = \int_{x_1}^{x_2} \frac{f(x)}{\rho(x)} \rho(x) dx$$

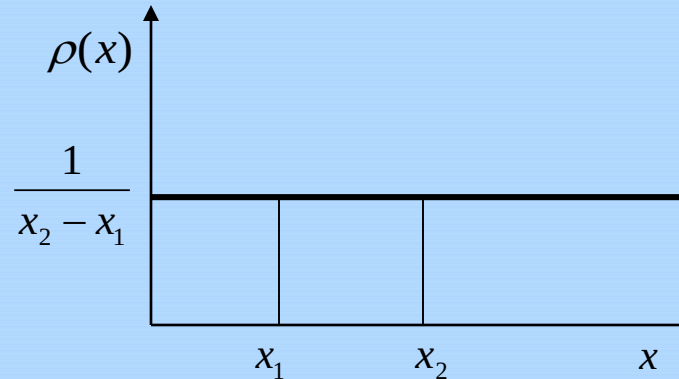


Przeprowadźmy τ losowań liczby ψ_τ z rozkładu $\rho(x)$ w granicach (x_1, x_2) , wtedy całka przyjmie postać średniej po wszystkich próbach;

$$F = \left\langle \frac{f(\psi_\tau)}{\rho(\psi_\tau)} \right\rangle_\tau$$

Najprostszy przypadek: funkcja gęstości rozkładu prawdopodobieństwa jest jednorodna w całym przedziale.

$$\rho(x) = \frac{1}{x_2 - x_1}$$



Wtedy całka przyjmie następującą postać dyskretną;

$$F = \frac{(x_2 - x_1)}{\tau_{\max}} \sum_{\tau=1}^{\tau_{\max}} f(\psi_{\tau})$$

Zwykle w przypadkach jednowymiarowych metoda MC daje gorsze wyniki od innych metod

$$\begin{array}{ll} \text{Dla MC} & \Delta F = \frac{1}{\sqrt{\tau_{\max}}} \end{array} \quad \begin{array}{ll} \text{Dla trapezów} & \Delta F = \frac{1}{(\tau_{\max})^2} \end{array}$$

Algorytm MC

1. Weźmy dowolną całkę oznaczoną:

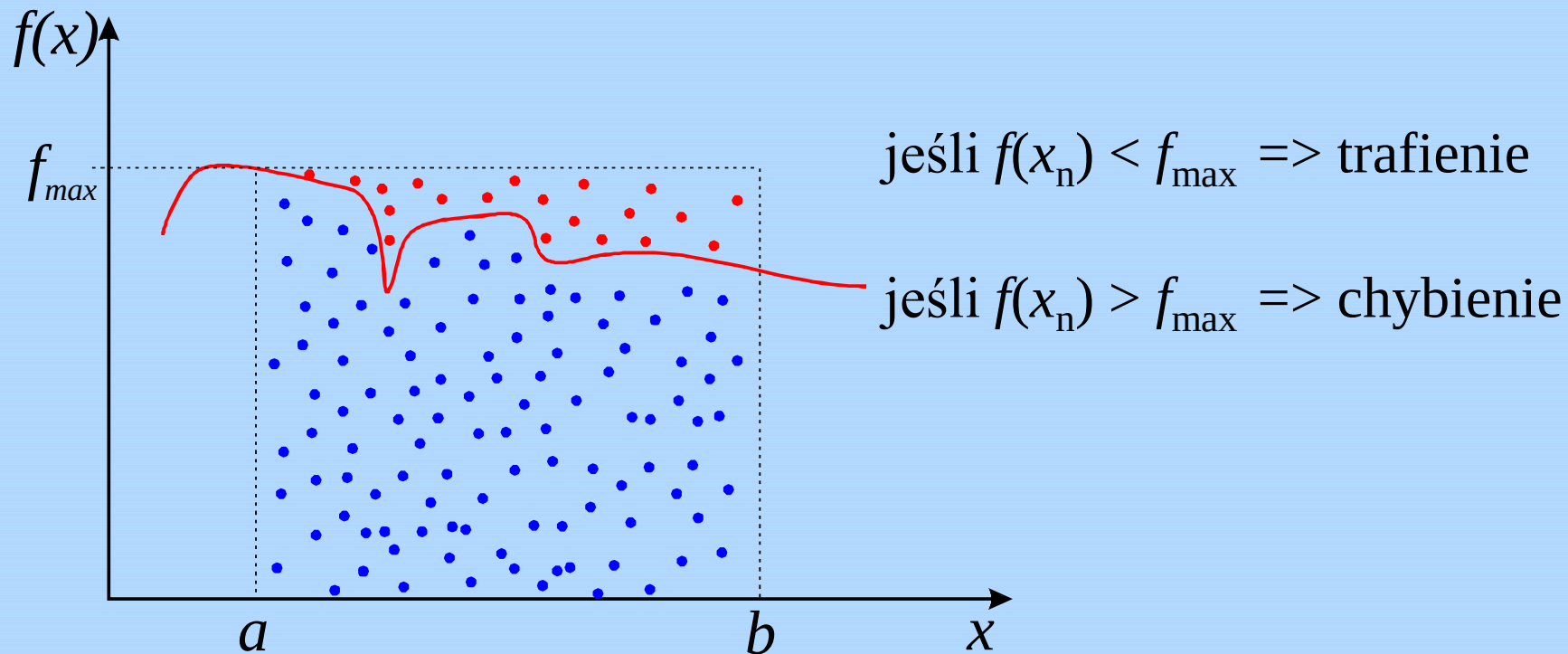
$$\int_a^b f(x)dx$$

2. Następnie losujemy niezależne liczby $u_1, u_2, \dots, u_n$ z rozkładu jednostajnego $U[0,1]$;
3. Obliczamy x_k :

$$x_k = a + (b - a)u_k \text{ dla } k=0,1,2,\dots,n;$$

4. Przybliżoną wartość całki obliczamy ze wzoru:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

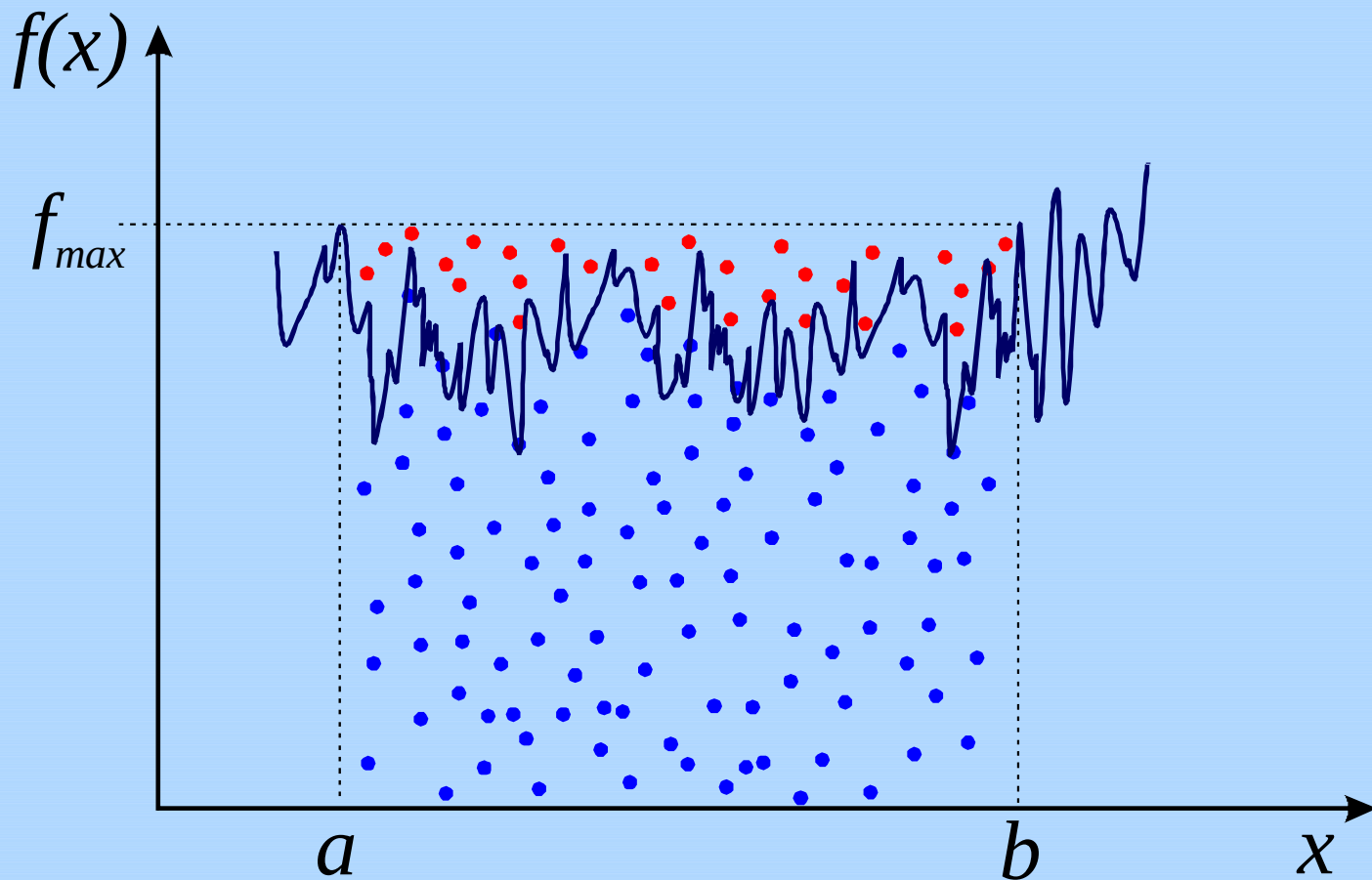


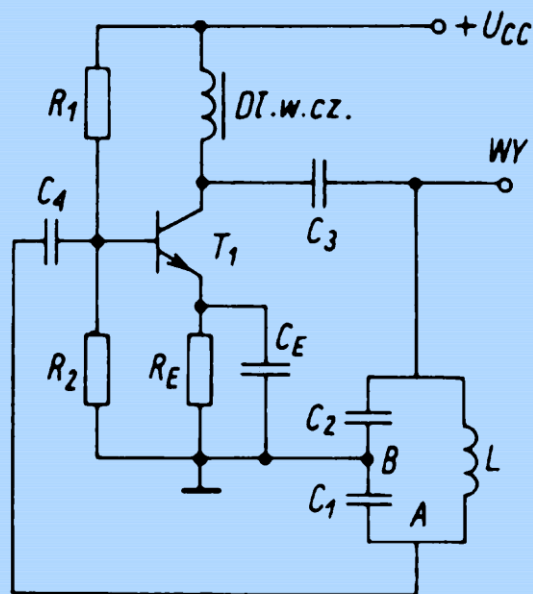
$$\frac{\text{liczba losowań}}{(b-a) f_{\max}} = \frac{\text{liczba trafień}}{\int_a^b f(x) dx}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{\text{liczba trafień}}{\text{liczba losowań}} (b-a) f_{\max}$$

liczba losowań = liczba trafień + liczba chybień

Metoda dobrze radzi sobie z całkowaniem przebiegów losowych
Nie ma też problemów związanych z liczbami zespolonymi





$$f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_z}}$$

$$C_z = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

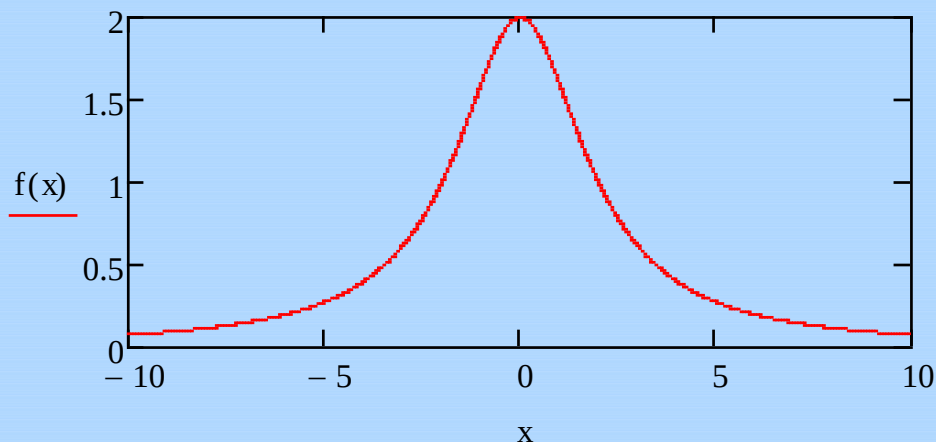
Jakie powinny być tolerancje elementów LC aby częstotliwość generowana przez układy produkowane seryjnie mieściła się w przedziale $f_r \pm 5\%$?

Jaka powinna być stabilność temperaturowa (typy) kondensatorów aby układy produkowane seryjnie mogły pracować w zadanym zakresie temperatur?

Dokładność metody

Lok Angesiego

$$a := 2 \quad f(x) := \frac{a^3}{a^2 + x^2}$$



Całkowanie symboliczne

$$\int_{-10}^{10} f(x) dx \rightarrow 8 \cdot \text{atan}(5)$$

$$\approx 10.987$$

Całkowanie metodą adaptatywną - trapezową

$$\int_{-10}^{10} f(x) dx = 10.987$$

Całkowanie metodą Monte Carlo

```

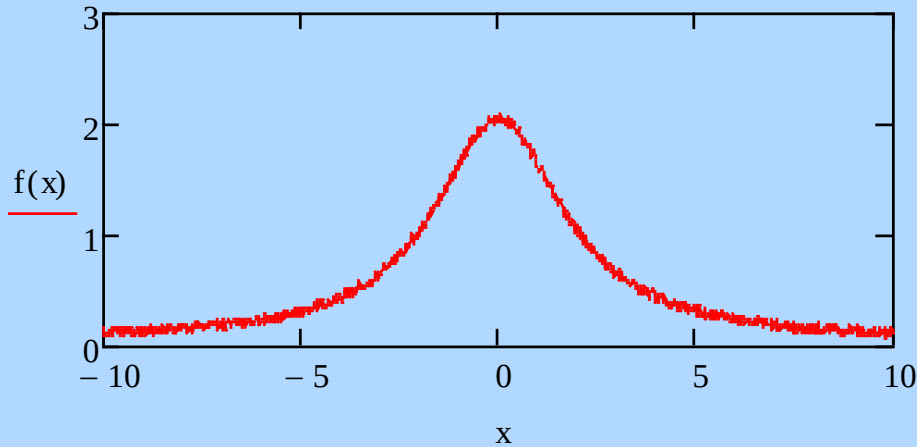
c(n) :=
  T ← 0
  for i ∈ 1..n
    xi ← rnd(10)
    yi ← rnd(f(0))
    T ← T + 1 if f(xi) > yi
  20·T / n
    
```

$$c(100) = 10.8 \quad c(1000) = 11.56 \quad c(10000) = 10.988$$

$$c(100000) = 10.964 \quad c(1000000) = 10.997$$

Zaszumiony lok Angesiego

$$a := 2 \quad f(x) := \frac{a^3}{a^2 + x^2} + \text{rnd}(0.1)$$



Całkowanie numeryczne

$$\int_{-10}^{10} f(x) dx = \blacksquare$$

Całkowanie metodą Monte Carlo

```

c(n) :=
  T ← 0
  for i ∈ 1..n
    xi ← rnd(10)
    yi ← rnd(f(0))
    T ← T + 1 if f(xi) > yi
  20·T / n

```

$$c(100) = 14.4$$

$$c(1000) = 11.96$$

$$c(10000) = 11.784$$

$$c(100000) = 11.65$$

$$c(1000000) = 11.716$$

$$\approx 10,987$$