# Technika radarowej penetracji gruntu

płk dr hab. inż. Mateusz Pasternak

mpasternak@wat.edu.pl

mpasternak.wel.wat.edu.pl

| semestr | forma zajęć, liczba godzin/rygor (x egzamin, + zaliczenie, # projekt) | | | | | | punkty ECTS |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | razem | wykłady | ćwiczenia | laboratoria | projekt | seminarium | |
| I | 44+ | 18 | 6 | 20 | | | 3 |
| razem | 44+ | 18 | 6 | 20 | | | 3 |

| lp. | temat/tematyka zajęć | liczba godzin | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | wykł. | ćw. | lab. | proj. | semin. |
| 1. | Wprowadzenie. Najważniejsze zastosowania georadarów. | 2 | | | | |
| 2. | Budowa gleb. Rozchodzenie się fal elektromagnetycznych w glebie. | 2 | | | | |
| 3. | Podstawy działania georadarów. Rodzaje zobrazowań. | 2 | | | | |
| 4. | Georadary impulsowe. | 2 | 2 | 4 | | |
| 5. | Georadary z falą ciągłą. | 2 | 2 | 4 | | |
| 6. | Georadary ze schodkową modulacją częstotliwości. | 2 | 2 | 8 | | |
| 7. | Anteny georadarowe. | 2 | | 4 | | |
| 8. | Podstawowe algorytmy przetwarzania danych georadarowych. | 2 | | | | |
| 9. | Metodyka pomiarów georadarowych. Podstawy interpretacji danych georadarowych. | 2 | | | | |
| Razem | | 18 | 6 | 20 | | |

**LITERATURA**

**podstawowa:**
J. Karczewski, Ł. Ortyl, M. Pasternak, Zarys metody georadarowej, wyd. II, AGH 2011.
H. M. Jol, Ground Penetrating Radar, Theory and Application, Elsevier 2009.

**uzupełniająca:**
D. J. Daniels, Ground Penetrating Radar, II ed., The Institution of Electrical Engineers, 2004.

**FORMA I WARUNKI ZALICZANIA PRZEDMIOTU**
Zaliczenie przedmiotu na podstawie pozytywnej oceny z ćwiczeń laboratoryjnych oraz zaliczenia pisemnego dotyczącego tematyki wykładów i ćwiczeń.

Radar penetracji gruntu (ang. ground penetriting radar - GPR) zwany krócej georadarem jest urządzeniem wykorzystującym fale radiowe do lokalizacji obiektów ulokowanych w gruncie.

Początek rozwoju metod GPR wyznacza rok 1903, w którym Christian Hülsmeyer wynalazł opatentowany pół roku później telemobiloskop czyli urządzenie do elektromagnetycznej detekcji metalu

W roku 1919 Eduard Raven opatentował urządzenie radarowe służące do poszukiwań podziemnych złóż minerałów i wody.

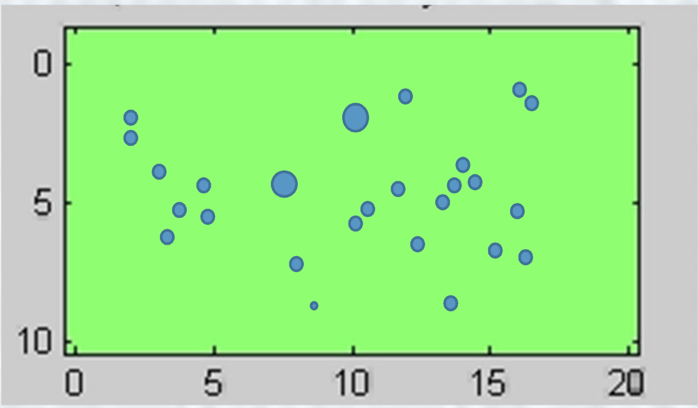
Kolejnymi kamieniami milowymi tej techniki stały się prowadzone u schyłku lat 60’ XX w. radzieckie badania wiecznej zmarzliny na północy ZSRR.

Na początku lat 70’ XX w. GPR był stosowany w amerykańskich badaniach Księżyca prowadzone w ramach misji Apollo.

W latach 80’ udane eksperymenty z zastosowaniem radarów w kopalni soli prowadzono także w Wojskowej Akademii Technicznej w Warszawie.

## Zasada działania

Radar tego typu wykrywa zmiany parametrów elektrycznych gruntu, może więc wykryć obiekty różniące się znacząco pod względem elektrycznym od otoczenia.




Obiektami odbijającymi mogą być np.: granice warstw, pustki, korzenie, kamienie itp., stąd echa docierające do odbiornika radaru są zwykle złożeniem ech pochodzących od wielu celów

Podstawowe cechy odróżniające radiolokację klasyczną od GPR

Bardzo wysokie tłumienie rzędu setek dB/m – niewielkie zasięgi

Dominujący clutter

Poważne problemy interpretacyjne

Konieczność stosowania ultraszerokich pasm częstotliwości

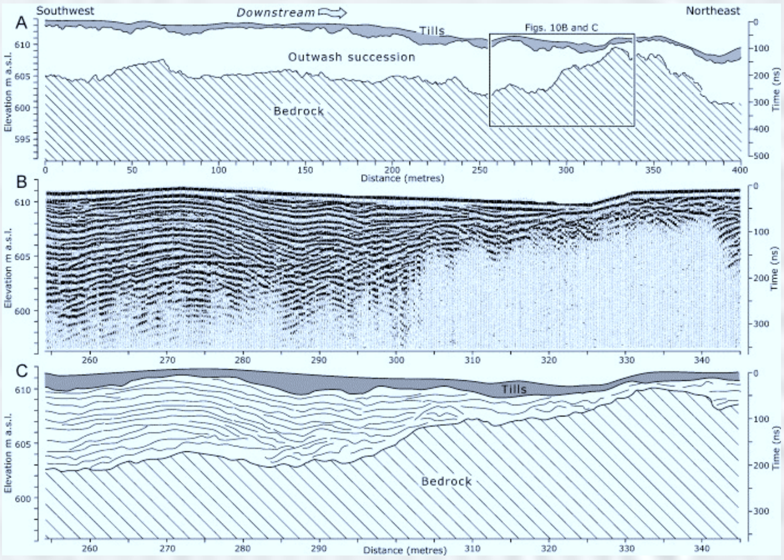
Ograniczenia częstotliwościowe

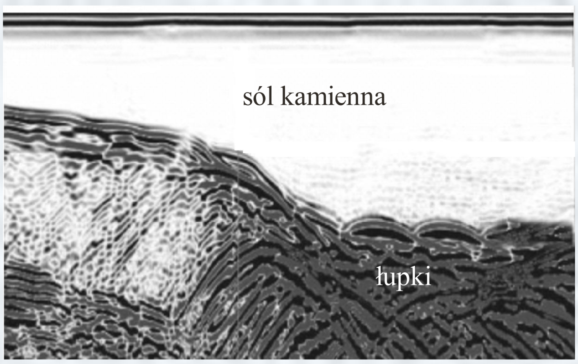
Technika ta jest nadal rozwijana z uwagi na liczne zastosowania.

Główne obszary zastosowań:

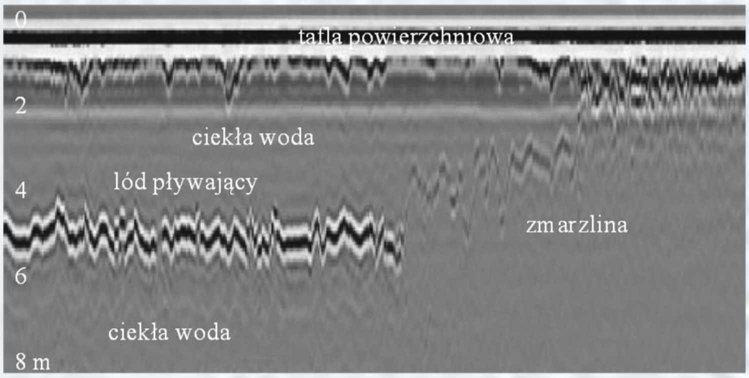
- Geologia
- Glacjologia
- Górnictwo
- Dendrologia
- Archeologia
- Inżynieria budowlana
- Wojsko
- Straż graniczna
- Policja
- i in.

Geologia

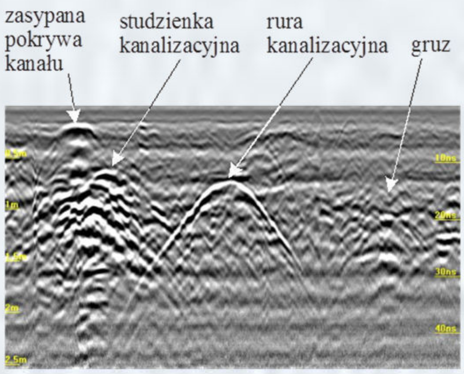

A
Southwest
Downstream
Northeast
Tills
Figs. 10B and C
Outwash succession
Bedrock
Elevation m a.s.l.
Time (ns)
Distance (metres)
B
C
Tills
Bedrock
Distance (metres)

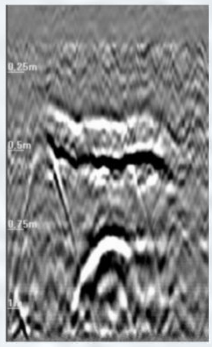

sól kamienna
łupki

Glacjologia

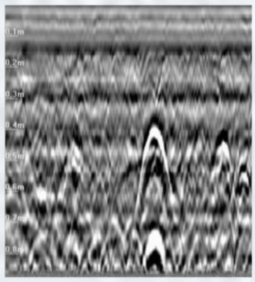



Detekcja infrastruktury podziemnej

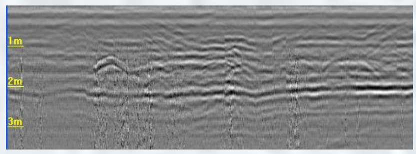


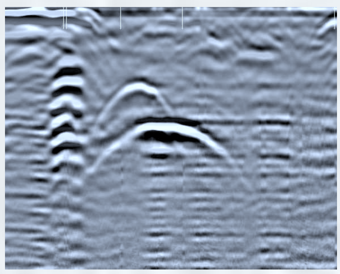
Obiekt pod chodnikiem



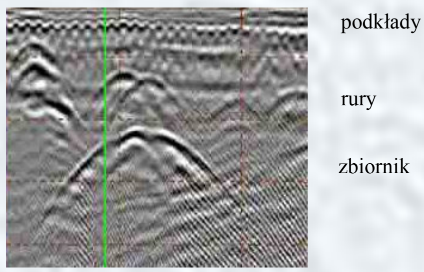
Cztery obiekty położone blisko siebie



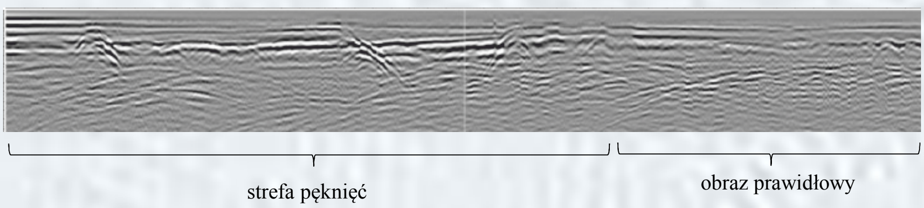
Profil georadarowy terenu ujawniający nieudokumentowaną podziemną strukturę, prawdopodobnie kabel energetyczny



Rura i zbiornik podziemny

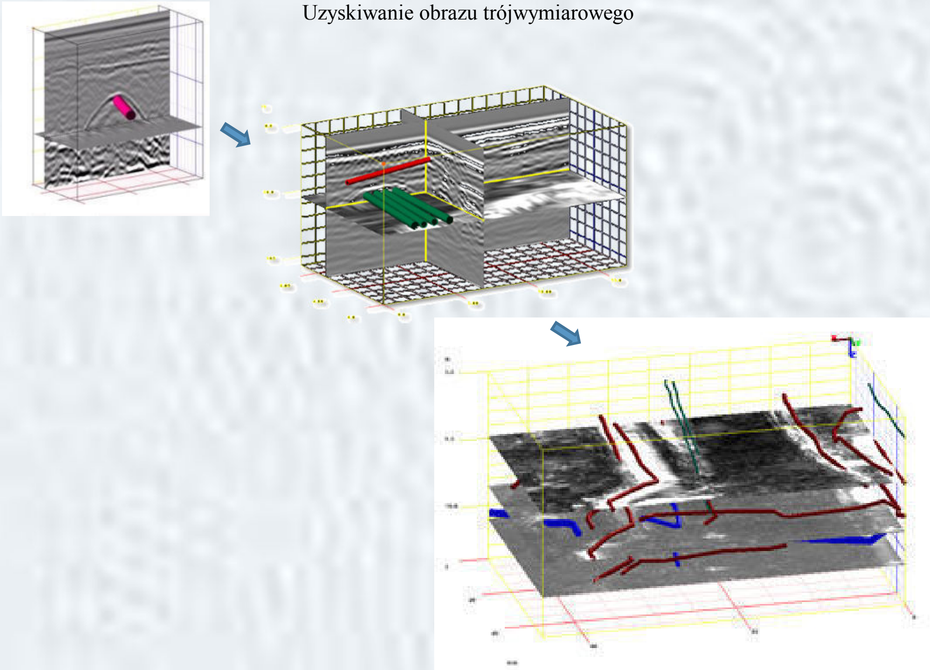



Przekrój wzdłuż torowiska

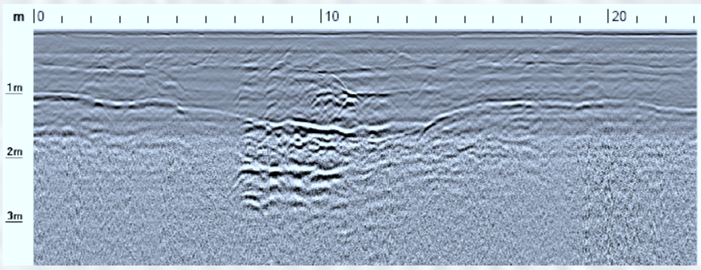


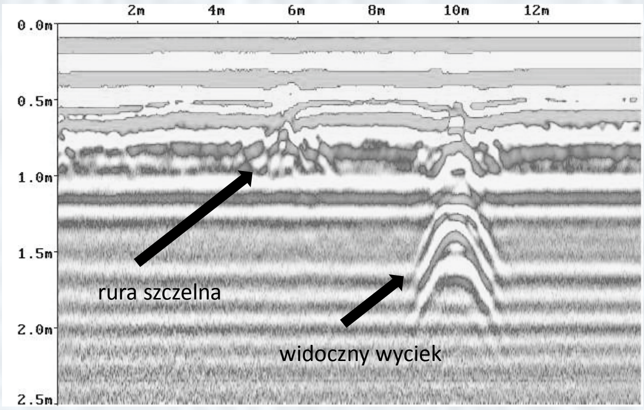

Przekrój nawierzchni asfaltowej

Uzyskiwanie obrazu trójwymiarowego



Stary problem – nowe rozwiązanie



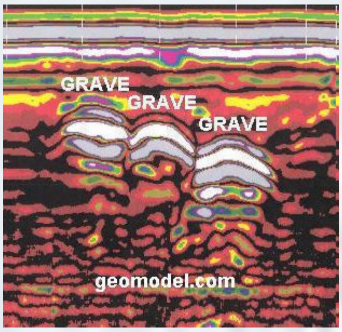


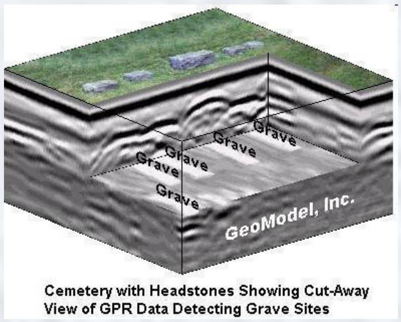

Rury PCV szczelna i cieknąca

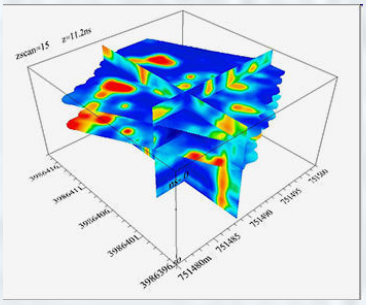
Kryminologia

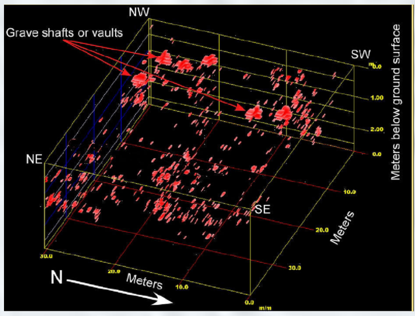
1994
Frederick i Rosemary West
Gloucester, 25 Cromwell Str.

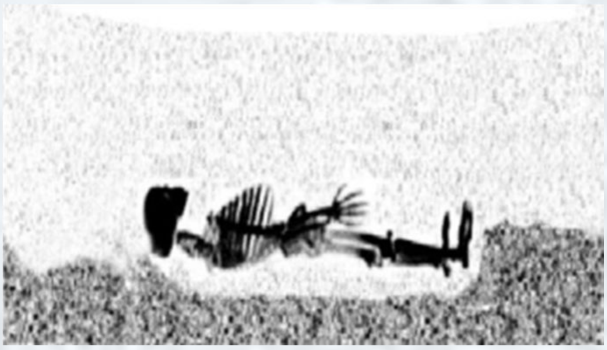

Fot. Gloucestershire Echo

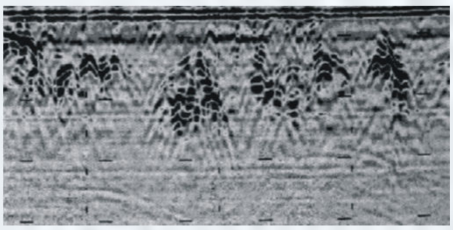


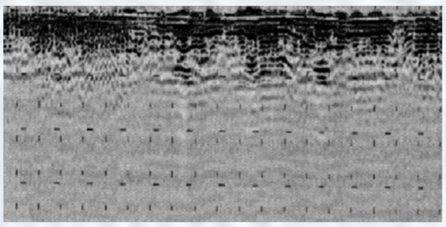





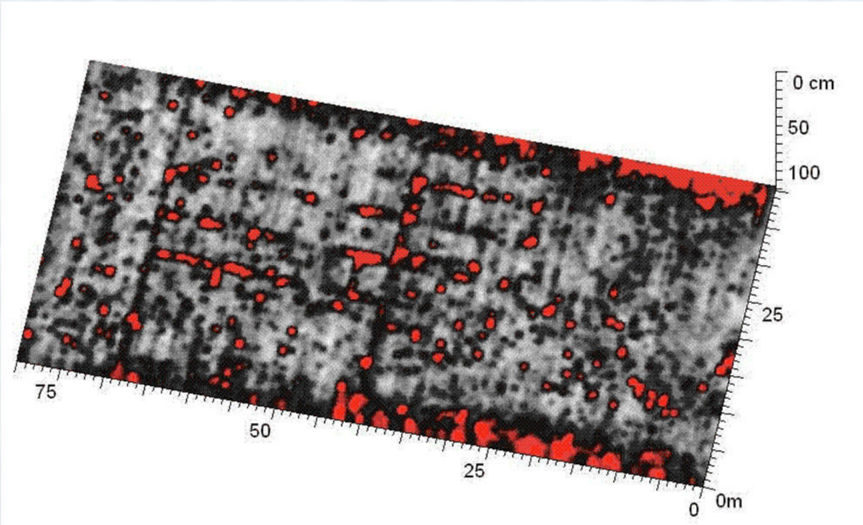


świeże pochówki

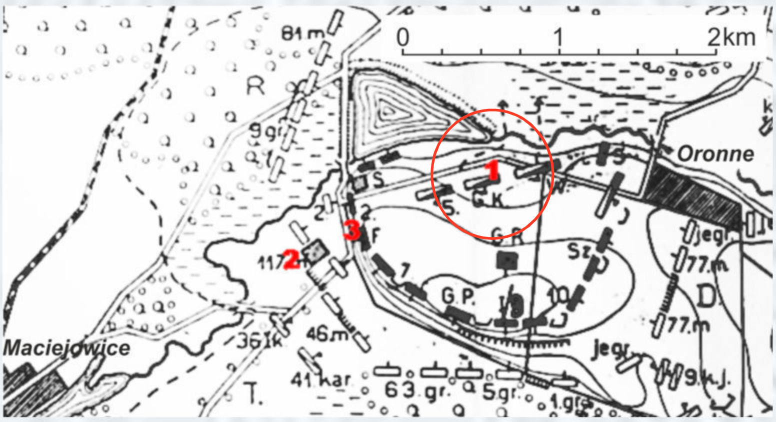


po 5 latach

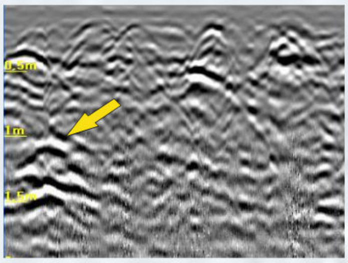
Archeologia



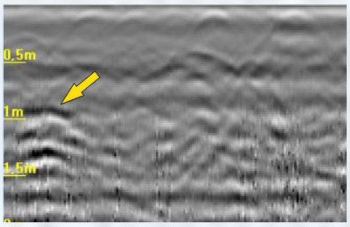

## Miejsca wykonania pomiarów



Struktura N 51°42′ 11,44″,  E 21°35′ 58,47″

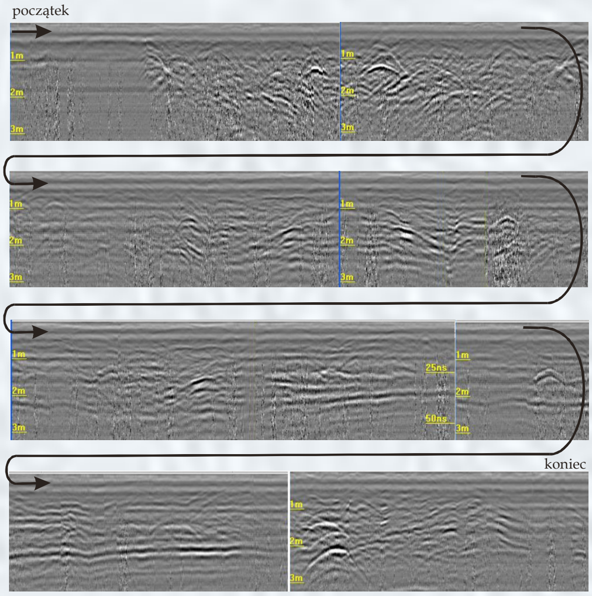



Pomiar antenami 0,6 GHz

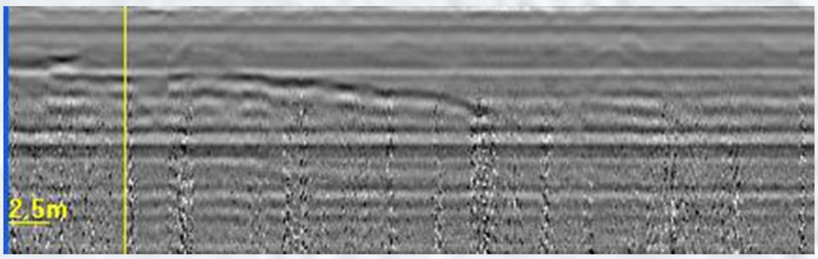



Pomiar antenami 0,2 GHz

## Przykład zarejestrowanych anomalii – antena 0,2 GHz




Domniemany tunel



Dendrologia
Ryzografia

FAKTY CHICAGO.com

## Zmarł Polak przywalony drzewem

**Jerzy Szczepanek (33 lata) zmarł po przewiezieniu w stanie krytycznym do szpitala, po tym jak spróchniałe drzewo zmiażdżyło jego vana.**

O 7:59 a.m. w piątek w Advocate Lutheran General Hospital w Park Ridge zmarł Jerzy Szczepanek. Lekarzom nie udało się uratować życia Polakowi, który uległ tak tragicznemu wypadkowi. Pozostawił żonę i dwojkę małych dzieci. Mieszkał z rodziną w Des Plaines.

Wypadek miał miejsce w środę 7 kwietnia, 2010, około 7:20 rano, przy ulicy Cumberland w pobliżu Addison, w północno-zachodniej części Chicago.

tvn24

## Spróchniałe drzewo przygniotło jadące auto. Kobieta w szpitalu

Drzewo przygniotło samochód — Foto: TVN24 | Video: TVN24

**Jedna osoba została ranna po tym, jak we Wrocławiu na jadący samochód zawaliło się drzewo. Konar uderzył w maskę samochodu. Jak się okazało, drzewo było całkowicie spróchniałe. Samochodem podróżowały dwie osoby - mężczyzna i kobieta, która została odwieziona do szpitala.**

Do zdarzenia doszło w środę wieczorem. Jak relacjonuje asp. Aleksander Metzger ze straży pożarnej we Wrocławiu, osoby jadące samochodem zostały wydobyte z wnętrza auta jeszcze przed przyjazdem służb ratunkowych. Podkreśla, że gdyby drzewo uderzyło w dach samochodu, mogłoby dojść do tragedii.

Kierowca auta zapewnia, że jechał wolno i sam był w szoku po tym, co się stało. - Tylko widziałem jak się to drzewo przewraca. Zdążyłem zrobić jedynie mimowolny ruch w prawo kierownicą. To wszystko - relacjonował po wypadku.

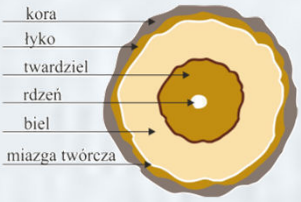
mn//kdj/k

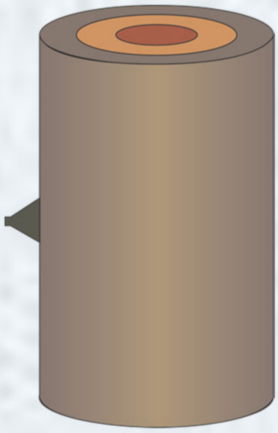
ŻYCIE WARSZAWY.PL

## Śmierć podczas spaceru w parku

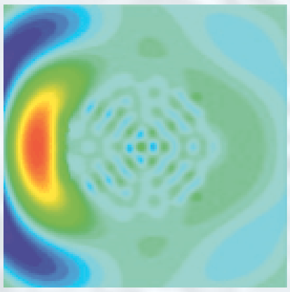
Spróchniały konar klonu runął wczoraj na kobietę idącą przez park Skaryszewski na Pradze-Południe. Zarządca twierdzi, że krótko przed wypadkiem sprawdzał stan drzew.

Ekspertyza wykonana na podstawie umowy PBN/03-630/2011/WAT na zlecenie Dyrektora Biura Stołecznego Konserwatora Zabytków

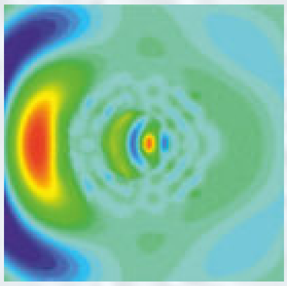



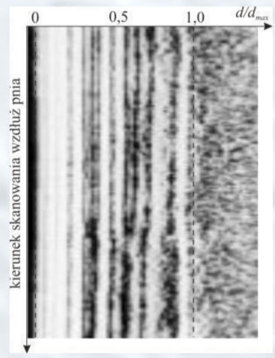
drzewo zdrowe

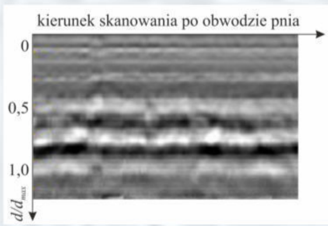


drzewo objęte próchnieniem



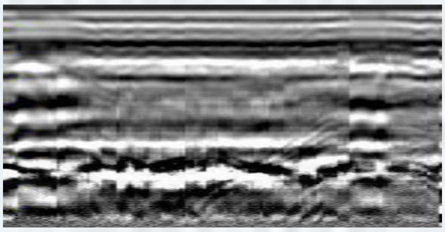
Przykładowe rezultaty pomiarów drzewa zdrowego



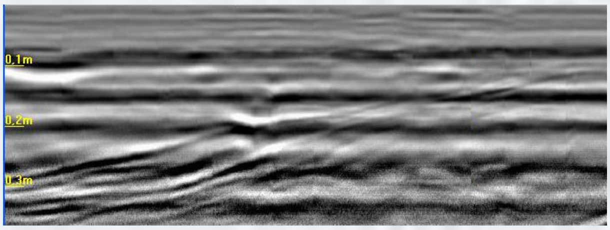



Przykładowe rezultaty pomiarów drzewa objętego próchnieniem

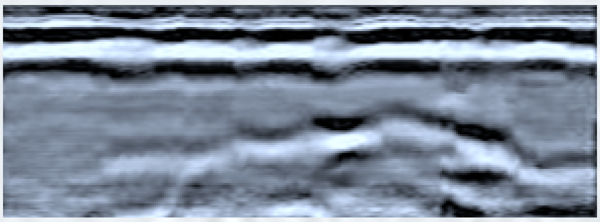
Skanowanie obwodowe



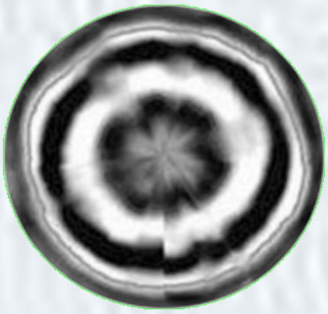
Skanowanie wzdłużne

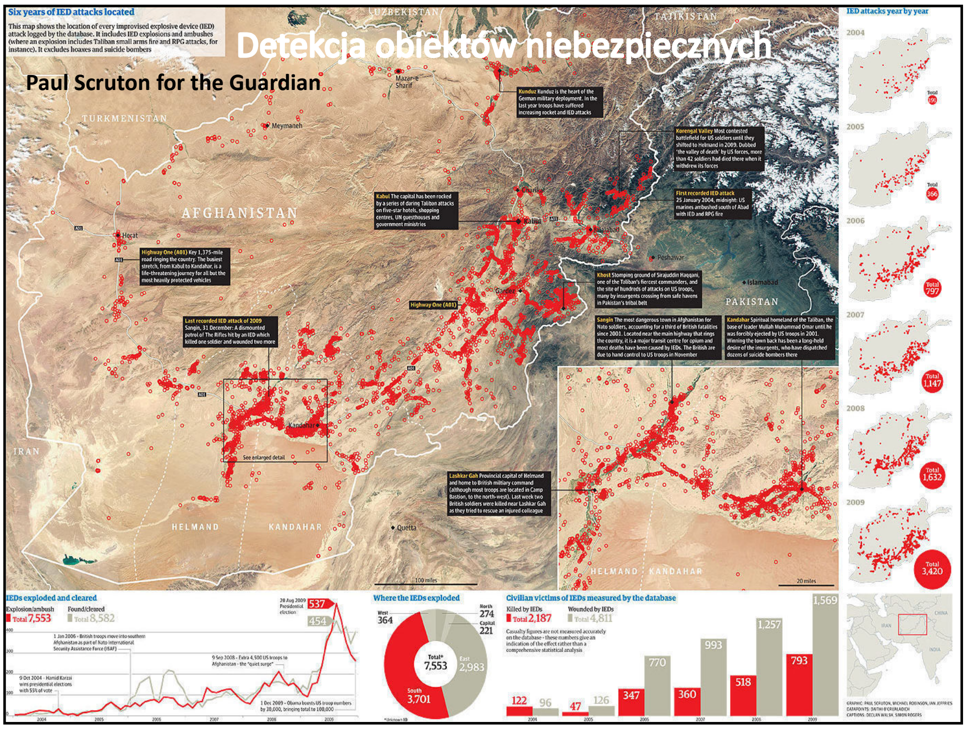



Reprezentacja radialna przy skanowaniu obwodowym

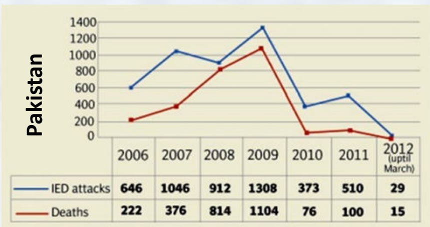


*imtransform*

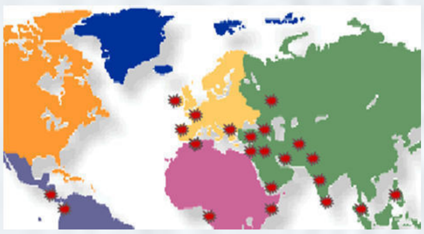


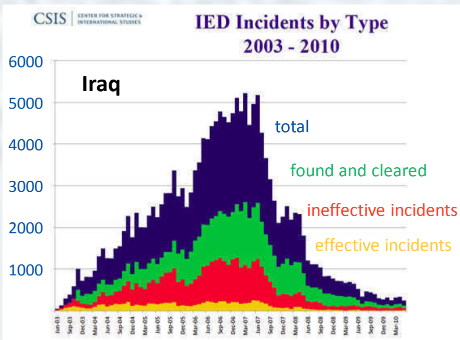



Improvised Explosive Devices




| | 2006 | 2007 | 2008 | 2009 | 2010 | 2011 | 2012 (uptil March) |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| IED attacks | 646 | 1046 | 912 | 1308 | 373 | 510 | 29 |
| Deaths | 222 | 376 | 814 | 1104 | 76 | 100 | 15 |

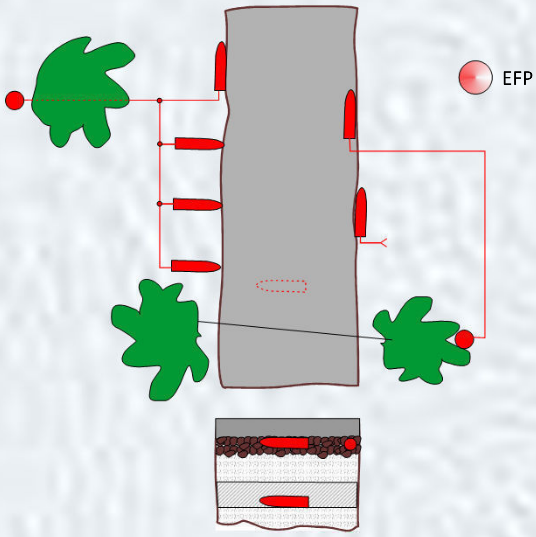





36/62 36/20

## IED

IED – sposób zakładania przy drodze

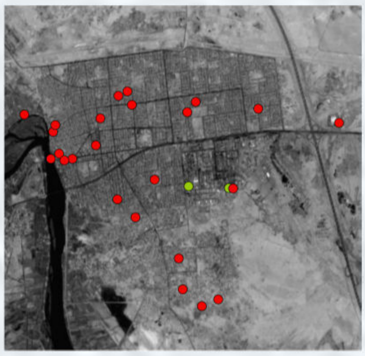


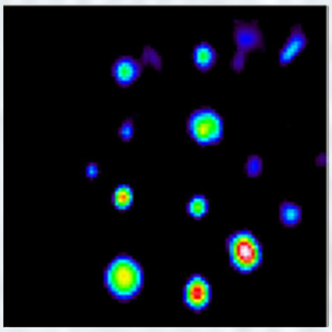
EFP - explosively formed projectile

*t* ~ 400 μs, *v* ~ 2000 m/s ~ 6 M, *p* ~ $10^6$ kg/cm$^2$

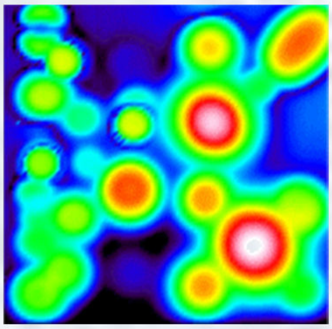



# Fallujah 2004
# wytwórnie IED/VBIED





GPR 20 dB



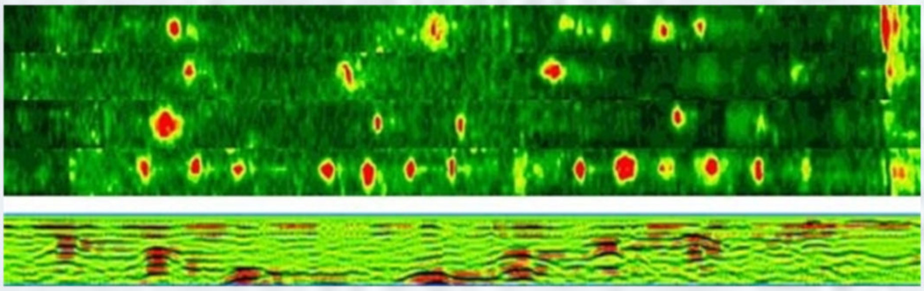
czujnik indukcyjny 90 dB

Metodyka detekcji

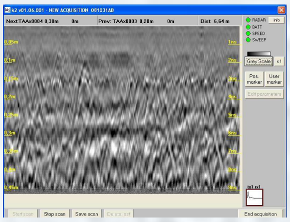
AN/PSS-14


NITEK VISOR™ 2500

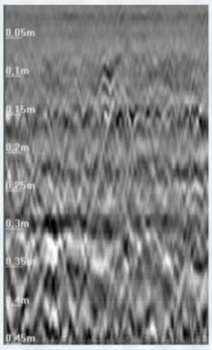
42/62



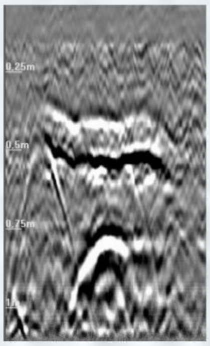
Laboratorium GPR



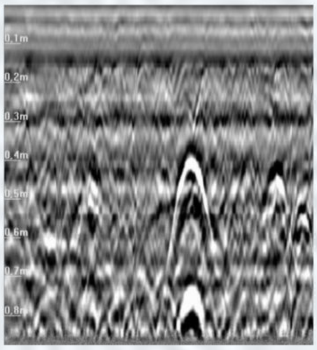
Przykładowe wyniki pomiarów radarem impulsowym



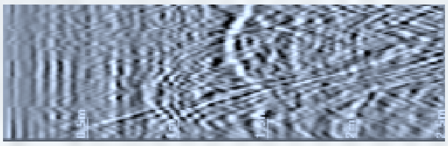
łopatka polietylenowa



obiekt pod chodnikiem



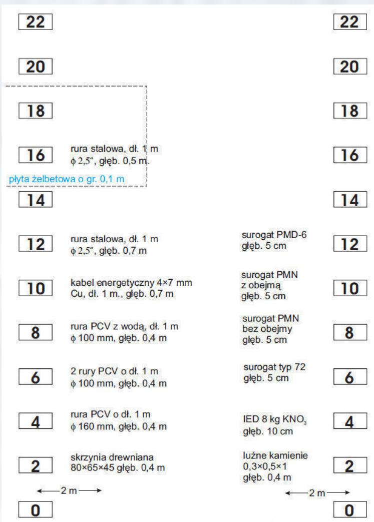
Cztery obiekty położone blisko siebie



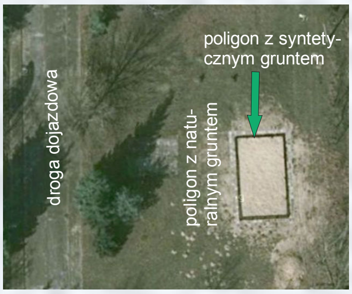
Próby wykrywania obiektów za ścianą

Poligon Pomiarowy

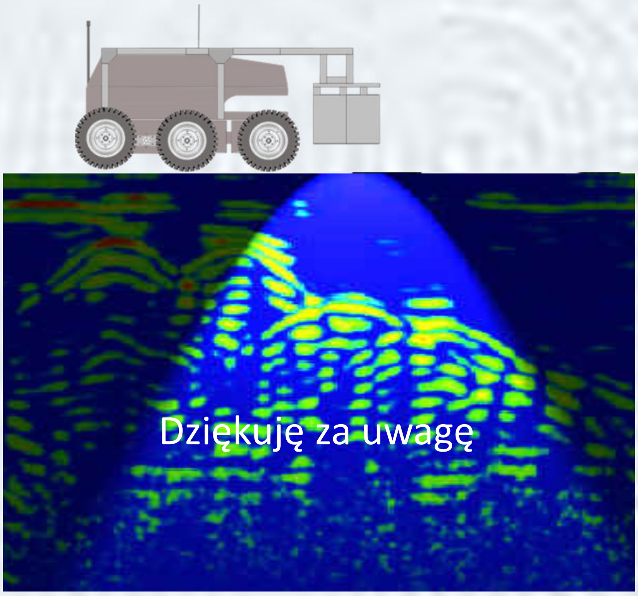
Rozmieszczenie obiektów




Widok z satelity (źr. Google Earth)



Komora z redukcją odbić i zestawy anten



# Budowa gleb
# Rozchodzenie się fal e-m w glebie

Gleba jest ośrodkiem skomplikowanym o parametrach zmiennych w czasie

Zawarte w glebie minerały mają tendencję do skupiania się w konkrecje o kształcie zazwyczaj kulistym, elipsoidalnym lub soczewkowatym.
Konkrecje mogą osiągnąć rozmiary od kilku milimetrów nawet do kilku metrów.
Konkrecje mogą same odznaczać się budową warstwową - rozrost następuje od jądra konkrecji (zarodka) do jej powierzchni

Czysty piasek rzeczny po kilku miesiącach działania czynników biologicznych i atmosferycznych

Poziomy genetyczne gleby (profil glebowy)

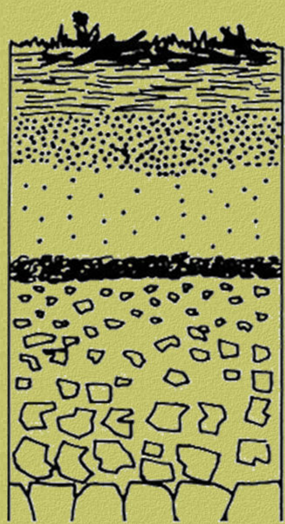
poziom organiczny $A_0$

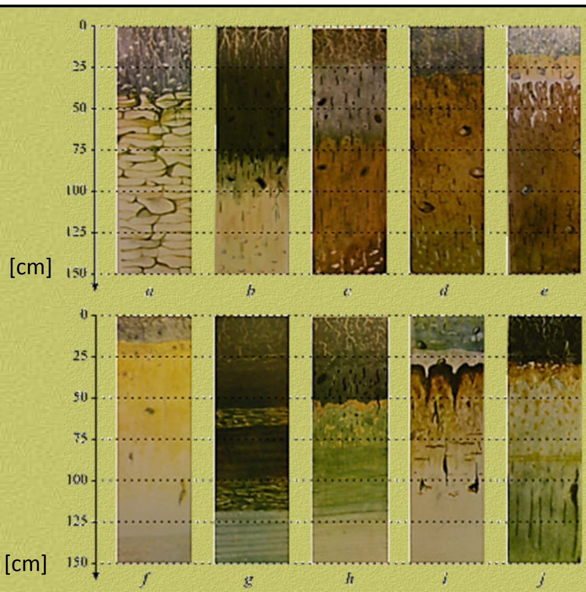
poziom próchniczny $A_1$

poziom wymywania $A_2$

poziom wmywania B

skała macierzysta C






Podstawowe rodzaje gleb europejskich: a – rędzina, b – czarnoziem, c – gleba szara (leśno łąkowa), d – gleba brunatna, e – gleba płowa, f – gleba rdzawa, g – gleba torfowo-mułowa (łąkowa), h – mada, i – bielica, j – gleba glejowa

**Rędziny** to gleby o cienkiej warstwie humusu, wytworzonej głównie przez szczątki traw, na skałach wapiennych. Gleby te zawierają dużo żwirów i kamieni.

**Czarnoziem** bardzo żyzna gleba powstała ze skał lessowych i lessopodobnych, czasem z glin marglistych, bogatych w związki wapnia. W warstwie powierzchniowej często obecny jest węglan wapnia i magnezu

**Gleba szara** jest glebą niewyraźnie rozwasrtwioną o znacznej zawartości próchnicy, występująca głównie w lasach dębowych strefy umiarkowanej.

**Gleba brunatna** charakteryzuje się występowaniem wyraźnego poziomu wietrzeniowego. Jest to typowa gleba leśna (lasów liściastych i mieszanych).
Brunatna barwapochodzi od związków żelaza oraz kompleksów żelazisto-próchniczno-ilastych, które w postaci cienkich otoczek powlekają ziarna glebowe.

**Gleba płowa** charakteryzuje się – gleby wymyciem iłu koloidalnego z przemieszczeniem go bez rozkładu do niżej położonego poziomu. Wyraźne uwarstwienie.

**Gleba rdzawa** posiada warstwę powierzchniową o miąższości nieprzekraczającej na ogół 20 cm. Warstwa ta przechodzi dość łagodnie w tzw. poziom rdzawy (bezwęglanowe zwały piaszczyste). W glebach uprawnych i porolnych zaznacza się wyraźna granica pomiędzy poziomem płużnym a poziomem rdzawym.

**Gleba torfowo-mułowa** są wytworzone z osadów organicznych i organiczno-mineralnych przewarstwionych lub zalegających na torfie. Wyraźne rozwarstwienie.

**Mada** jest glebą powstałą w wyniku nagromadzenia się materiału niesionego przez wody. Zasadniczą cechą mad jest obecność w profilu naprzemianległych warstw o skrajnie różnym lub zbliżonym składzie granulometrycznym. Mady tworzą się wzdłuż dolin rzecznych i wybrzeży morskich.

**Bielica** powstaje z utworów piaszczystych, zwykle pochodzenia lodowcowego i rzecznego, w procesie tzw. bielicowania. Proces ten polega na wypłukiwaniu z górnych części gleby produktów rozkładu minerałów glebowych, głównie tlenków i wodorotlenków glinu i żelaza oraz krzemionki, fosforu, manganu i przemieszczaniu ich w dół i wytrącaniu w środkowej części profilu. W rezultacie w górnych poziomach gleb bielicowych pozostaje biały kwarc. gleba ta posiada słabo rozwinięty poziom próchniczny, a dobrze rozwinięty poziom wymywania. Uwarstwienie dość nieregularne. Jest typowa dla Polski zajmując ok. 26% powierzchni kraju (głównie w części północnej).

**Gleba glejowa** powstaje wskutek procesu oglejenia (przesycenia wodą i wyparcia powietrza) w wyniku działania wysokich wód gruntowych. Gleby takie powstają z piasków, glin, rzecznych iłów. W swej budowie są glebami mineralnymi albo organiczno-mineralnymi.

Każdy fragment gleby złożony jest na ogół z kilku faz

- gleby właściwej
- wody związanej z glebą właściwą
- wody niezwiązanej (wolnej)
- powietrza

Ponad 80% gleb na terenie Polski to gleby o charakterze bielicowym, płowym bądź brunatnym, zaś 26% to same bielice.

W skład gleby właściwej (fazy stałej) wchodzą różnego typu cząstki mineralne, organiczne i organiczno-mineralne o różnym stopniu rozdrobnienia.

Fazę ciekłą stanowi przede wszystkim woda z rozpuszczonymi w niej związkami mineralnymi i organicznymi (tzw. roztwór glebowy).

Faza gazowa to przede wszystkim mieszanina gazów (głównie powietrza) i pary wodnej.

Wzajemny układ tych faz może ulegać znacznym zmianom pod wpływem procesów glebotwórczych oraz ingerencji człowieka.

Stosunki ilościowe wymienionych trzech faz w glebie charakteryzuje się przez określenie jej gęstości objętościowej, porowatości, wilgotności i zwięzłości.
Ze względu na zróżnicowanie materiału glebowego w profilu wyróżnia się gleby całkowite i niecałkowite.
W całym profilu gleby całkowitej do głębokości ok. 1,5 m znajduje się ten sam materiał (piasek, glina, ił). Zróżnicowanie uziarnienia takiego profilu powodują wyłącznie procesy glebotwórcze.
Gleby niecałkowite do głębokości ok. 1,5 m zawierają przynajmniej dwie różne warstwy, np. piasek do głębokości 0,5 m, a poniżej glinę.

Gleby – podział na podstawie składu granulometrycznego

lekkie, zawierające do 18% części łatwych do wypłukania (spławialnych), charakteryzujące się małą zwięzłością w stanie suchym i niezbyt dużą lepkością w stanie mokrym - w praktyce gleby te nazywane są glebami piaskowymi,

średnie, zawierające 20-35% części spławialnych,

ciężkie, zawierające ponad 50% części spławialnych,

bardzo ciężkie

Granulacja typowych składników

| materiał | granulacja |
|---|---|
| piasek | > 60 µm |
| ił | 2 - 60 µm |
| glina | < 2 µm |

Kilka cech gleby istotnych z punktu widzenia modelowania

gleba do głębokości 1,5 m składa się z kilku warstw o różnych parametrach elektrycznych

poszczególne warstwy nie są zwykle jednorodne i ich parametry wymagają opisu za pomocą odrębnych modeli

do większości zastosowań wystarczające wydaje się uwzględnienie dwóch, co najwyżej trzech warstw w modelu

względną przenikalność magnetyczną gleby można zwykle uznać za równą 1

parametry gleby zależą przede wszystkim od jej wilgotności

| ośrodek | przenikalność względna (ε') | konduktywność [mS/m] |
|---|---|---|
| powietrze | 1 | 0 |
| woda słodka | 81 | 0,10-30 |
| woda morska | 70 | 400 |
| piasek suchy | 4-6 | 0,0001-1 |
| piasek mokry | 25 | 0,1-1 |
| łupek mokry | 10 | 1-10 |
| glina mokra | 8-12 | 100-1000 |
| ziemia z piaskiem sucha | 10 | 2 |
| lód słodkowodny | 4 | 0,1-10 |
| lód morski | 4-12 | - |
| zmarzlina | 4-8 | 0,01-10 |
| granit suchy | 5 | 0,00001 |
| wapień | 7-9 | 0,000001 |
| dolomit | 6-8 | - |
| kwarc | 4 | - |
| węgiel kamienny | 4-5 | - |
| beton | 5-10 | - |
| marmur | 8,3 | - |
| mika | 7,6 | - |
| drewno suche | 2,0-8,0 | - |

czysty piasek 2% wody

| f [Hz] | $\varepsilon/\varepsilon_0$ | tgδ |
|---|---|---|
| $10^2$ | 3,23 | $6,4 \cdot 10^{-1}$ |
| $10^3$ | 2,72 | $1,3 \cdot 10^{-1}$ |
| $10^4$ | 2,50 | $5,6 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^5$ | 2,50 | $3,0 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^6$ | 2,50 | $2,5 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^7$ | 2,50 | $2,5 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^8$ | 2,50 | $2,6 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^9$ | 2,50 | $3,0 \cdot 10^{-2}$ |

czysty piasek 20% wody

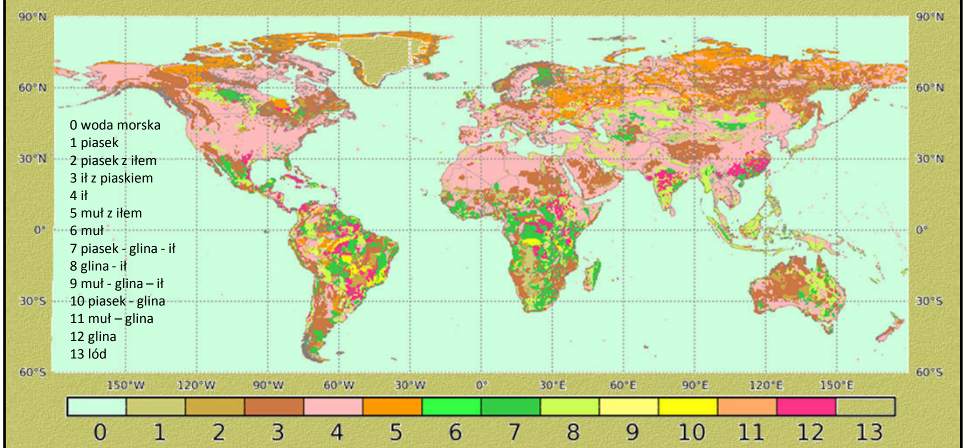
| f [Hz] | $\varepsilon/\varepsilon_0$ | tgδ |
|---|---|---|
| $10^6$ | 20 | 4,0 |
| $10^7$ | 20 | $3,5 \cdot 10^{-1}$ |
| $10^8$ | 20 | $3,0 \cdot 10^{-2}$ |
| $10^9$ | 20 | $1,3 \cdot 10^{-1}$ |

Piasek z 4 % iłu, 2 % zanieczyszczeń, 19 % wody

| f [Hz] | $\varepsilon/\varepsilon_0$ | tgδ |
|---|---|---|
| $10^2$ | $2,0 \cdot 10^{-1}$ | 3,42 |
| $10^3$ | $8,0 \cdot 10^{-2}$ | 2,91 |
| $10^4$ | $3,4 \cdot 10^{-2}$ | 2,75 |
| $10^5$ | $2,0 \cdot 10^{-2}$ | 2,65 |
| $10^6$ | $1,7 \cdot 10^{-2}$ | 2,59 |
| $10^7$ | $1,6 \cdot 10^{-2}$ | 2,55 |
| $10^8$ | $1,0 \cdot 10^{-2}$ | 2,55 |
| $10^9$ | $6,2 \cdot 10^{-3}$ | 2,55 |

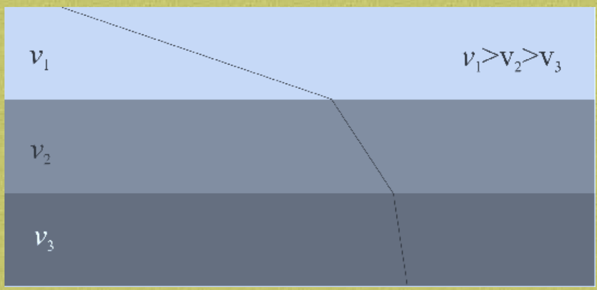
parametry propagacyjne fal e-m dla różnych ośrodków glebowych

| | ε | σ (mS/m) | c (m/ns) | A (dB/m) |
|---|---|---|---|---|
| powietrze | 1 | 0 | 0,3 | 0 |
| woda destylowana | 80 | 0,01 | 0,033 | 0,002 |
| woda słodka | 80 | 0,5 | 0,033 | 0,1 |
| woda morska | 80 | 30,0 | 0,01 | 1,000 |
| suchy piasek | 3-5 | 0,01 | 0,15 | 0,01 |
| piasek nasycony wodą | 20-30 | 0,1-1,0 | 0,06 | 0,03-0,3 |
| wapień | 4-8 | 0,5-2 | 0,12 | 0,4-1 |
| łupek | 5-15 | 1-100 | 0,09 | 1-100 |
| muł | 5-30 | 1-100 | 0,07 | 1-100 |
| glina | 4-40 | 2-1,0 | 0,06 | 1-300 |
| granit | 4-6 | 0,01-1 | 0,13 | 0,01-1 |
| sól kuchenna | 5-6 | 0,01-1 | 0,13 | 0,01-1 |
| lód | 3-4 | 0,01 | 0,16 | 0,01 |



Zasada Fermata

Fala wybiera drogę umożliwiającą przebycie określonego dystansu w najkrótszym czasie




$$\frac{\sin\theta_{pad}}{\sin\theta_{zał}} = \frac{v_1}{v_2}$$

W przypadku odbicia - kąt padania i kąt odbicia są sobie równe

Prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku zależy od jego przenikalności

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

Dla większości gleb można przyjąć $\mu_r = 1$

stąd

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Impedancja falowa ośrodka

$$Z = \frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Współczynnik odbicia

$$\Gamma = \frac{u_{odb}}{u_{pad}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$$

przykładowe wartości współczynników odbicia

piasek mokry/piasek suchy

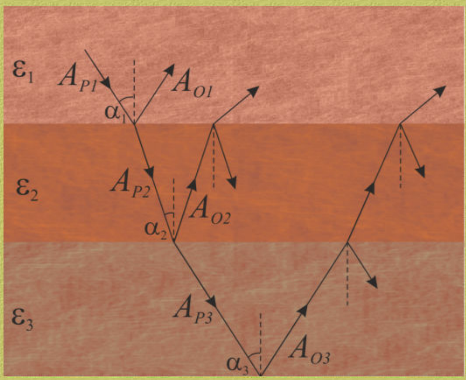
$$\Gamma_{pm/ps} = 0,43$$

piasek suchy/ granit suchy

$$\Gamma_{ps/gs} = 0,056$$

powietrze/ piasek mokry

$$\Gamma_{ps/gs} = 0,67$$




$$\frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha_{i+1})} = \frac{n_{i+1}}{n_i} \quad \Rightarrow \quad n_i = \frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_i)}$$

$$\Gamma = \frac{n_i - n_{i+1}}{n_i + n_{i+1}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{ri}} - \sqrt{\varepsilon_{r(i+1)}}}{\sqrt{\varepsilon_{ri}} + \sqrt{\varepsilon_{r(i+1)}}}$$

W praktyce dla każdego materiału współczynnik załamania zależy od długości fali

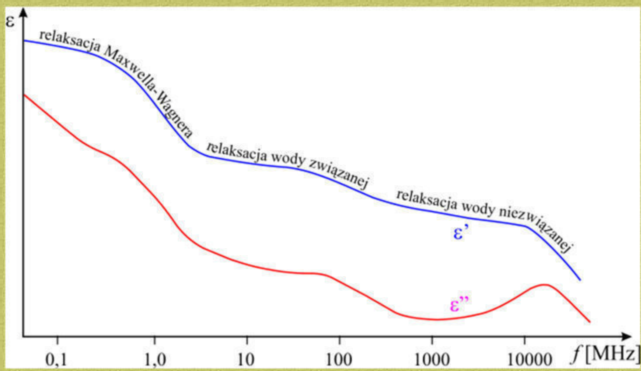
$$\lambda = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\, f}$$

Wyznaczona empirycznie zależność zwana jest równaniem Sellmeiera, współczynnika załamania od długości fali w glebie przyjmuje postać

$$n^2(\lambda) = 1 + \sum_i \frac{A_i \lambda^2}{\lambda^2 - B_i}$$

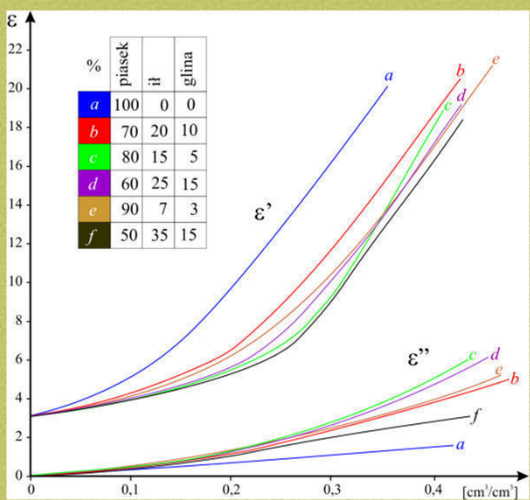
A, B – współczynniki empiryczne

Kluczowym parametrem jest przenikalność elektryczna




Czas relaksacji w najprostszym modelu M-W ma postać

$$\tau_{\text{M-W}} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$




zawartość wody

Jeśli gleba zawiera inkluzje sytuacja się komplikuje

Najprostszym modelem dla płaskich inkluzji jest model Loora

$$\varepsilon_m = \frac{3\varepsilon_s + 2V_{fw}\left(\varepsilon_{fw} - \varepsilon_s\right) + 2V_{bw}\left(\varepsilon_{bw} - \varepsilon_s\right) + 2V_a\left(\varepsilon_a - \varepsilon_s\right)}{3 + V_{fw}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{fw}} - 1\right) + V_{bw}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bw}} - 1\right) + V_a\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a} - 1\right)}$$

indeksy $s, fw, bw$ *i* $a$ odnoszą się odpowiednio do suchej gleby, wolnej wody, wody związanej oraz powietrza

$$\varepsilon_{fw}\left(f\right) \approx \varepsilon_\infty - j\frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_0}$$

$\varepsilon_\infty$ jest teoretyczną przenikalnością wody dla nieskończenie wielkiej częstotliwości (równą ok. 4)

$\sigma$ - konduktywność wody

Tłumienność gleby

Na tłumienie fali e-m w glebie składają się:

- straty związane z pokonywaną odległością od radaru,
- skuteczność zastosowanych anten,
- niedopasowania w układzie odbiorczym,
- tłumienność ośrodka,
- straty związane z przejściem sygnału przez granicę warstw,
- tłumienność zlokalizowanego obiektu,
- rozpraszanie na granicach warstw

Bilans mocy

moc emitowana przez antenę nadawczą

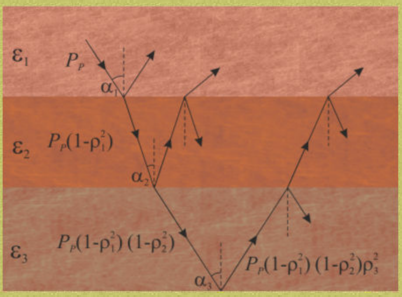
$$S_1 = \frac{P_t G}{4\pi \cdot R^2}$$

$P_t$ moc nadajnika
$G$ zysk energetyczny anteny
$R$ odległość

moc odebrana przez antenę odbiorczą

$$S_2 = \frac{P_t G}{4\pi \cdot R^2} \cdot A_0 \cdot \frac{A_e}{4\pi \cdot R^2}$$

$A_0$ skuteczna powierzchnia odbicia obiektu
$A_e$ skuteczna powierzchnia anteny




$P_P$ moc początkowa
$P_K$ moc docierająca do K-tej warstwy
$\rho$ – lokalne współczynniki odbicia

$$P_K = P_P \prod_{i=1}^{K-1} \left(1-\rho_i^2\right)$$

moc początkowa docierająca do anteny odbiorczej

$$P_{odb\_K} = P_P \rho_K^2 \prod_{i=1}^{K-1} \left(1-\rho_i^2\right)^2$$

Straty wprowadzane przez ośrodek

$$L_a = 8{,}686 \cdot 2 \cdot R \cdot 2\pi f \sqrt{\left( \frac{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}{2} \left( \sqrt{1 + \tan^2(\delta)} - 1 \right) \right)}$$

| materiał | $L_a$ [dB/m] dla 100 MHz | $L_a$ [dB/m] dla 1 GHz |
|---|---|---|
| wilgotna glina | 5 - 300 | 50 - 3000 |
| gliniasta ziemia (wilgotna) | 1 - 60 | 10 - 600 |
| suchy piasek | 0,01 - 2 | 0,1 - 20 |
| suchy beton | 0,5 – 2,5 | 5 - 25 |
| woda morska | 100 | 1000 |

Poziom strat związanych z rozpraszaniem fali e-m na powierzchni chropowatej

przesunięcie fazy – kryterium Rayleigha

$$\Delta\phi = \frac{4\pi d \cdot \sin(\gamma)}{\lambda}$$

$\gamma$ - kąt między kierunkiem rozchodzenia się fali a powierzchnią odbijającą
$d$ – różnica wysokości - jeśli $d \ll \lambda$ powierzchnię uważa się za płaską

$dla \quad \Delta\phi > \pi/2 \qquad d \geq \dfrac{\lambda}{8\sin(\gamma)}$

Po uwzględnieniu wszystkich strat

$$S_K = \frac{P_t G}{4\pi \cdot R^2} \cdot A_0 \cdot \frac{A_e}{4\pi \cdot R^2} \cdot \rho_K^2 \prod_{i=1}^{K-1} \left[ \left(1 - \rho_i^2\right)^2 \cdot \xi_i \cdot \zeta_i \right]$$

$\zeta_i$ - straty związane z rozpraszaniem fali elektromagnetycznej w i-tej warstwie ziemi
$\xi_i$ - straty związane z tłumiennością i-tej warstwy

Typowa głębokość nie przekracza kilku metrów.

W bardzo wilgotnej ziemi pomiar radarem jest praktycznie niemożliwy.

Najlepszym ośrodkami do przeprowadzenia sondowań georadarowych jest suchy piasek.

# Budowa gleb
# Rozchodzenie się fal e-m w glebie

Gleba jest ośrodkiem skomplikowanym o parametrach zmiennych w czasie

Zawarte w glebie minerały mają tendencję do skupiania się w konkrecje o kształcie zazwyczaj kulistym, elipsoidalnym lub soczewkowatym.
Konkrecje mogą osiągnąć rozmiary od kilku milimetrów nawet do kilku metrów.
Konkrecje mogą same odznaczać się budową warstwową - rozrost następuje od jądra konkrecji (zarodka) do jej powierzchni

Czysty piasek rzeczny po kilku miesiącach działania czynników biologicznych i atmosferycznych

Poziomy genetyczne gleby (profil glebowy)

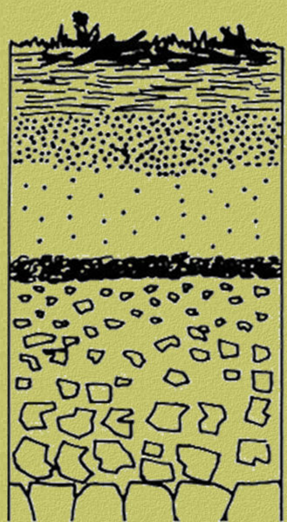
poziom organiczny $A_0$

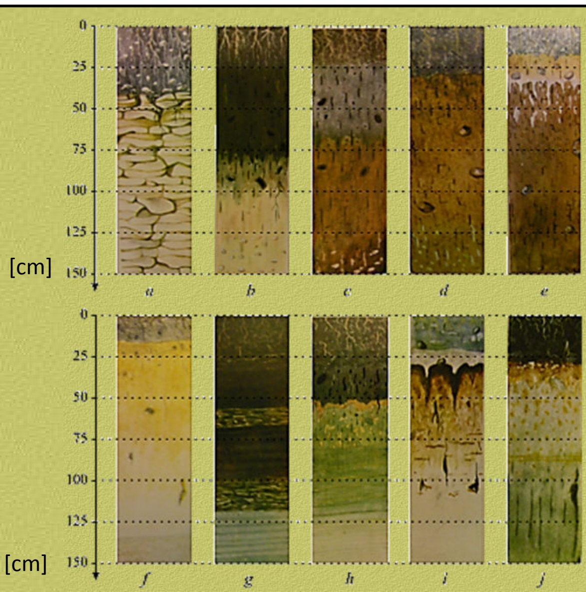
poziom próchniczny $A_1$

poziom wymywania $A_2$

poziom wmywania B

skała macierzysta C






Podstawowe rodzaje gleb europejskich: a – rędzina, b – czarnoziem, c – gleba szara (leśno łąkowa), d – gleba brunatna, e – gleba płowa, f – gleba rdzawa, g – gleba torfowo-mułowa (łąkowa), h – mada, i – bielica, j – gleba glejowa

**Rędziny** to gleby o cienkiej warstwie humusu, wytworzonej głównie przez szczątki traw, na skałach wapiennych. Gleby te zawierają dużo żwirów i kamieni.

**Czarnoziem** bardzo żyzna gleba powstała ze skał lessowych i lessopodobnych, czasem z glin marglistych, bogatych w związki wapnia. W warstwie powierzchniowej często obecny jest węglan wapnia i magnezu

**Gleba szara** jest glebą niewyraźnie rozwasrtwioną o znacznej zawartości próchnicy, występująca głównie w lasach dębowych strefy umiarkowanej.

**Gleba brunatna** charakteryzuje się występowaniem wyraźnego poziomu wietrzeniowego. Jest to typowa gleba leśna (lasów liściastych i mieszanych).
Brunatna barwapochodzi od związków żelaza oraz kompleksów żelazisto-próchniczno-ilastych, które w postaci cienkich otoczek powlekają ziarna glebowe.

**Gleba płowa** charakteryzuje się – gleby wymyciem iłu koloidalnego z przemieszczeniem go bez rozkładu do niżej położonego poziomu. Wyraźne uwarstwienie.

**Gleba rdzawa** posiada warstwę powierzchniową o miąższości nieprzekraczającej na ogół 20 cm. Warstwa ta przechodzi dość łagodnie w tzw. poziom rdzawy (bezwęglanowe zwały piaszczyste). W glebach uprawnych i porolnych zaznacza się wyraźna granica pomiędzy poziomem płużnym a poziomem rdzawym.

**Gleba torfowo-mułowa** są wytworzone z osadów organicznych i organiczno-mineralnych przewarstwionych lub zalegających na torfie. Wyraźne rozwarstwienie.

**Mada** jest glebą powstałą w wyniku nagromadzenia się materiału niesionego przez wody. Zasadniczą cechą mad jest obecność w profilu naprzemianległych warstw o skrajnie różnym lub zbliżonym składzie granulometrycznym. Mady tworzą się wzdłuż dolin rzecznych i wybrzeży morskich.

**Bielica** powstaje z utworów piaszczystych, zwykle pochodzenia lodowcowego i rzecznego, w procesie tzw. bielicowania. Proces ten polega na wypłukiwaniu z górnych części gleby produktów rozkładu minerałów glebowych, głównie tlenków i wodorotlenków glinu i żelaza oraz krzemionki, fosforu, manganu i przemieszczaniu ich w dół i wytrącaniu w środkowej części profilu. W rezultacie w górnych poziomach gleb bielicowych pozostaje biały kwarc. gleba ta posiada słabo rozwinięty poziom próchniczny, a dobrze rozwinięty poziom wymywania. Uwarstwienie dość nieregularne. Jest typowa dla Polski zajmując ok. 26% powierzchni kraju (głównie w części północnej).

**Gleba glejowa** powstaje wskutek procesu oglejenia (przesycenia wodą i wyparcia powietrza) w wyniku działania wysokich wód gruntowych. Gleby takie powstają z piasków, glin, rzecznych iłów. W swej budowie są glebami mineralnymi albo organiczno-mineralnymi.

Każdy fragment gleby złożony jest na ogół z kilku faz
- gleby właściwej
- wody związanej z glebą właściwą
- wody niezwiązanej (wolnej)
- powietrza

Ponad 80% gleb na terenie Polski to gleby o charakterze bielicowym, płowym bądź brunatnym, zaś 26% to same bielice.

W skład gleby właściwej (fazy stałej) wchodzą różnego typu cząstki mineralne, organiczne i organiczno-mineralne o różnym stopniu rozdrobnienia.

Fazę ciekłą stanowi przede wszystkim woda z rozpuszczonymi w niej związkami mineralnymi i organicznymi (tzw. roztwór glebowy).

Faza gazowa to przede wszystkim mieszanina gazów (głównie powietrza) i pary wodnej.

Wzajemny układ tych faz może ulegać znacznym zmianom pod wpływem procesów glebotwórczych oraz ingerencji człowieka.

Stosunki ilościowe wymienionych trzech faz w glebie charakteryzuje się przez określenie jej gęstości objętościowej, porowatości, wilgotności i zwięzłości.
Ze względu na zróżnicowanie materiału glebowego w profilu wyróżnia się gleby całkowite i niecałkowite.
W całym profilu gleby całkowitej do głębokości ok. 1,5 m znajduje się ten sam materiał (piasek, glina, ił). Zróżnicowanie uziarnienia takiego profilu powodują wyłącznie procesy glebotwórcze.
Gleby niecałkowite do głębokości ok. 1,5 m zawierają przynajmniej dwie różne warstwy, np. piasek do głębokości 0,5 m, a poniżej glinę.

Gleby – podział na podstawie składu granulometrycznego

lekkie, zawierające do 18% części łatwych do wypłukania (spławialnych), charakteryzujące się małą zwięzłością w stanie suchym i niezbyt dużą lepkością w stanie mokrym - w praktyce gleby te nazywane są glebami piaskowymi,

średnie, zawierające 20-35% części spławialnych,

ciężkie, zawierające ponad 50% części spławialnych,

bardzo ciężkie

Granulacja typowych składników

| materiał | granulacja |
|---|---|
| piasek | > 60 µm |
| ił | 2 - 60 µm |
| glina | < 2 µm |

Kilka cech gleby istotnych z punktu widzenia modelowania

gleba do głębokości 1,5 m składa się z kilku warstw o różnych parametrach elektrycznych

poszczególne warstwy nie są zwykle jednorodne i ich parametry wymagają opisu za pomocą odrębnych modeli

do większości zastosowań wystarczające wydaje się uwzględnienie dwóch, co najwyżej trzech warstw w modelu

względną przenikalność magnetyczną gleby można zwykle uznać za równą 1

parametry gleby zależą przede wszystkim od jej wilgotności

| ośrodek | przenikalność względna (ε') | konduktywność [mS/m] |
|---|---|---|
| powietrze | 1 | 0 |
| woda słodka | 81 | 0,10-30 |
| woda morska | 70 | 400 |
| piasek suchy | 4-6 | 0,0001-1 |
| piasek mokry | 25 | 0,1-1 |
| łupek mokry | 10 | 1-10 |
| glina mokra | 8-12 | 100-1000 |
| ziemia z piaskiem sucha | 10 | 2 |
| lód słodkowodny | 4 | 0,1-10 |
| lód morski | 4-12 | - |
| zmarzlina | 4-8 | 0,01-10 |
| granit suchy | 5 | 0,00001 |
| wapień | 7-9 | 0,000001 |
| dolomit | 6-8 | - |
| kwarc | 4 | - |
| węgiel kamienny | 4-5 | - |
| beton | 5-10 | - |
| marmur | 8,3 | - |
| mika | 7,6 | - |
| drewno suche | 2,0-8,0 | - |

czysty piasek 2% wody

| f [Hz] | $\varepsilon/\varepsilon_0$ | tgδ |
|---|---|---|
| $10^2$ | 3,23 | $6,4\cdot10^{-1}$ |
| $10^3$ | 2,72 | $1,3\cdot10^{-1}$ |
| $10^4$ | 2,50 | $5,6\cdot10^{-2}$ |
| $10^5$ | 2,50 | $3,0\cdot10^{-2}$ |
| $10^6$ | 2,50 | $2,5\cdot10^{-2}$ |
| $10^7$ | 2,50 | $2,5\cdot10^{-2}$ |
| $10^8$ | 2,50 | $2,6\cdot10^{-2}$ |
| $10^9$ | 2,50 | $3,0\cdot10^{-2}$ |

czysty piasek 20% wody

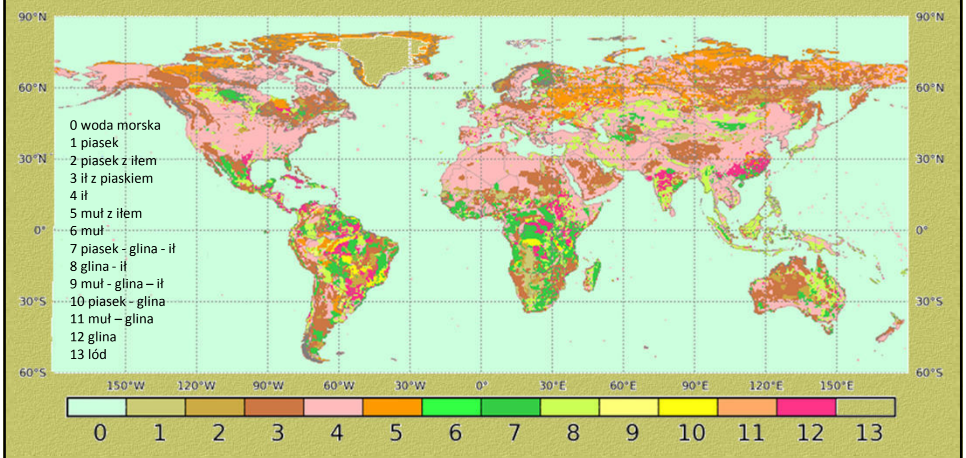
| f [Hz] | $\varepsilon/\varepsilon_0$ | tgδ |
|---|---|---|
| $10^6$ | 20 | 4,0 |
| $10^7$ | 20 | $3,5\cdot10^{-1}$ |
| $10^8$ | 20 | $3,0\cdot10^{-2}$ |
| $10^9$ | 20 | $1,3\cdot10^{-1}$ |

Piasek z 4 % iłu, 2 % zanieczyszczeń, 19 % wody

| f [Hz] | $\varepsilon/\varepsilon_0$ | tgδ |
|---|---|---|
| $10^2$ | $2,0\cdot10^{-1}$ | 3,42 |
| $10^3$ | $8,0\cdot10^{-2}$ | 2,91 |
| $10^4$ | $3,4\cdot10^{-2}$ | 2,75 |
| $10^5$ | $2,0\cdot10^{-2}$ | 2,65 |
| $10^6$ | $1,7\cdot10^{-2}$ | 2,59 |
| $10^7$ | $1,6\cdot10^{-2}$ | 2,55 |
| $10^8$ | $1,0\cdot10^{-2}$ | 2,55 |
| $10^9$ | $6,2\cdot10^{-3}$ | 2,55 |

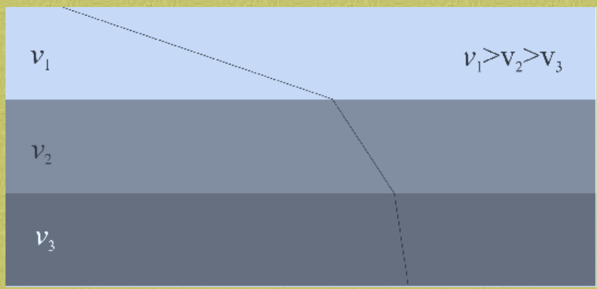
parametry propagacyjne fal e-m dla różnych ośrodków glebowych

| | ε | σ (mS/m) | c (m/ns) | A (dB/m) |
|---|---|---|---|---|
| powietrze | 1 | 0 | 0,3 | 0 |
| woda destylowana | 80 | 0,01 | 0,033 | 0,002 |
| woda słodka | 80 | 0,5 | 0,033 | 0,1 |
| woda morska | 80 | 30,0 | 0,01 | 1,000 |
| suchy piasek | 3-5 | 0,01 | 0,15 | 0,01 |
| piasek nasycony wodą | 20-30 | 0,1-1,0 | 0,06 | 0,03-0,3 |
| wapień | 4-8 | 0,5-2 | 0,12 | 0,4-1 |
| łupek | 5-15 | 1-100 | 0,09 | 1-100 |
| muł | 5-30 | 1-100 | 0,07 | 1-100 |
| glina | 4-40 | 2-1,0 | 0,06 | 1-300 |
| granit | 4-6 | 0,01-1 | 0,13 | 0,01-1 |
| sól kuchenna | 5-6 | 0,01-1 | 0,13 | 0,01-1 |
| lód | 3-4 | 0,01 | 0,16 | 0,01 |



Zasada Fermata

Fala wybiera drogę umożliwiającą przebycie określonego dystansu w najkrótszym czasie




$$\frac{\sin\theta_{pad}}{\sin\theta_{zał}} = \frac{v_1}{v_2}$$

W przypadku odbicia - kąt padania i kąt odbicia są sobie równe

Prędkość fali elektromagnetycznej w ośrodku zależy od jego przenikalności

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}}$$

Dla większości gleb można przyjąć $\mu_r = 1$

stąd

$$v = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Impedancja falowa ośrodka

$$Z = \frac{|E|}{|H|} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Współczynnik odbicia

$$\Gamma = \frac{u_{odb}}{u_{pad}} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}$$

$$\Gamma = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}$$

przykładowe wartości współczynników odbicia

piasek mokry/piasek suchy

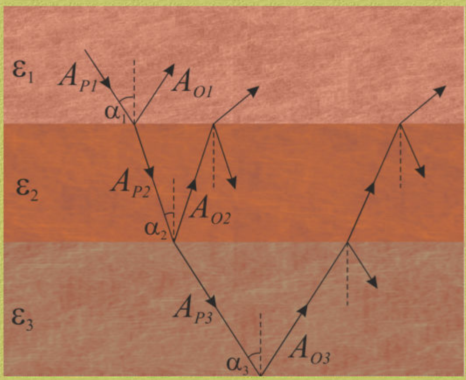
$$\Gamma_{pm/ps} = 0,43$$

piasek suchy/ granit suchy

$$\Gamma_{ps/gs} = 0,056$$

powietrze/ piasek mokry

$$\Gamma_{ps/gs} = 0,67$$




$$\frac{\sin(\alpha_i)}{\sin(\alpha_{i+1})}=\frac{n_{i+1}}{n_i} \quad \Rightarrow \quad n_i=\frac{\sin(\alpha_1)}{\sin(\alpha_i)}$$

$$\Gamma=\frac{n_i-n_{i+1}}{n_i+n_{i+1}}=\frac{\sqrt{\varepsilon_{ri}}-\sqrt{\varepsilon_{r(i+1)}}}{\sqrt{\varepsilon_{ri}}+\sqrt{\varepsilon_{r(i+1)}}}$$

W praktyce dla każdego materiału współczynnik załamania zależy od długości fali

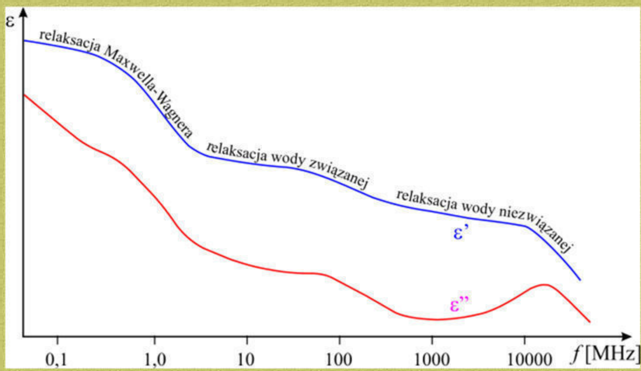
$$\lambda=\frac{c}{\sqrt{\varepsilon_r}\,f}$$

Wyznaczona empirycznie zależność zwana jest równaniem Sellmeiera, współczynnika załamania od długości fali w glebie przyjmuje postać

$$n^2(\lambda)=1+\sum_i\frac{A_i\lambda^2}{\lambda^2-B_i}$$

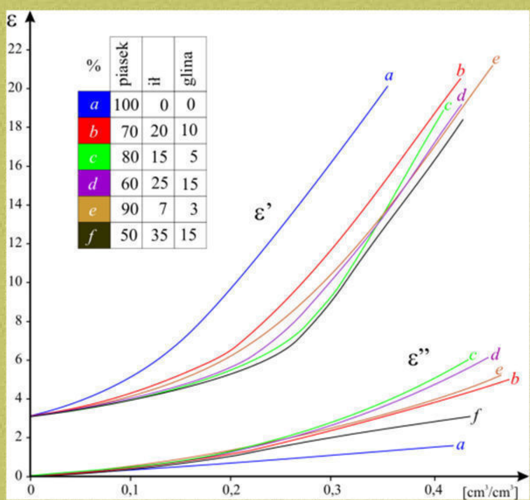
A, B – współczynniki empiryczne

Kluczowym parametrem jest przenikalność elektryczna




Czas relaksacji w najprostszym modelu M-W ma postać

$$\tau_{\text{M-W}} = \varepsilon_0 \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\sigma_1 + \sigma_2}$$




zawartość wody

Jeśli gleba zawiera inkluzje sytuacja się komplikuje

Najprostszym modelem dla płaskich inkluzji jest model Loora

$$\varepsilon_m = \frac{3\varepsilon_s + 2V_{fw}\left(\varepsilon_{fw} - \varepsilon_s\right) + 2V_{bw}\left(\varepsilon_{bw} - \varepsilon_s\right) + 2V_a\left(\varepsilon_a - \varepsilon_s\right)}{3 + V_{fw}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{fw}} - 1\right) + V_{bw}\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{bw}} - 1\right) + V_a\left(\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_a} - 1\right)}$$

indeksy $s, fw, bw$ *i* $a$ odnoszą się odpowiednio do suchej gleby, wolnej wody, wody związanej oraz powietrza

$$\varepsilon_{fw}\left(f\right) \approx \varepsilon_\infty - j\frac{\sigma}{2\pi f \varepsilon_0}$$

$\varepsilon_\infty$ jest teoretyczną przenikalnością wody dla nieskończenie wielkiej częstotliwości (równą ok. 4)

$\sigma$ - konduktywność wody

Tłumienność gleby

Na tłumienie fali e-m w glebie składają się:

- straty związane z pokonywaną odległością od radaru,
- skuteczność zastosowanych anten,
- niedopasowania w układzie odbiorczym,
- tłumienność ośrodka,
- straty związane z przejściem sygnału przez granicę warstw,
- tłumienność zlokalizowanego obiektu,
- rozpraszanie na granicach warstw

Bilans mocy

moc emitowana przez antenę nadawczą

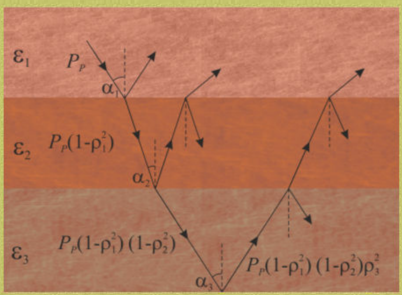
$$S_1 = \frac{P_t G}{4\pi \cdot R^2}$$

$P_t$ moc nadajnika
$G$ zysk energetyczny anteny
$R$ odległość

moc odebrana przez antenę odbiorczą

$$S_2 = \frac{P_t G}{4\pi \cdot R^2} \cdot A_0 \cdot \frac{A_e}{4\pi \cdot R^2}$$

$A_0$ skuteczna powierzchnia odbicia obiektu
$A_e$ skuteczna powierzchnia anteny




$P_P$ moc początkowa
$P_K$ moc docierająca do K-tej warstwy
$\rho$ – lokalne współczynniki odbicia

$$P_K = P_P \prod_{i=1}^{K-1} \left(1-\rho_i^2\right)$$

moc początkowa docierająca
do anteny odbiorczej

$$P_{odb\_K} = P_P \rho_K^2 \prod_{i=1}^{K-1} \left(1-\rho_i^2\right)^2$$

Straty wprowadzane przez ośrodek

$$L_a = 8,686 \cdot 2 \cdot R \cdot 2\pi f \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}\left(\sqrt{1+\tan^2(\delta)}-1\right)\right)}$$

| materiał | $L_a$ [dB/m] dla 100 MHz | $L_a$ [dB/m] dla 1 GHz |
|---|---|---|
| wilgotna glina | 5 - 300 | 50 - 3000 |
| gliniasta ziemia (wilgotna) | 1 - 60 | 10 - 600 |
| suchy piasek | 0,01 - 2 | 0,1 - 20 |
| suchy beton | 0,5 – 2,5 | 5 - 25 |
| woda morska | 100 | 1000 |

Poziom strat związanych z rozpraszaniem fali e-m na powierzchni chropowatej

przesunięcie fazy – kryterium Rayleigha

$$\Delta\phi = \frac{4\pi d \cdot \sin(\gamma)}{\lambda}$$

$\gamma$ - kąt między kierunkiem rozchodzenia się fali a powierzchnią odbijającą
$d$ – różnica wysokości - jeśli $d << \lambda$ powierzchnię uważa się za płaską

*dla* $\Delta\phi > \pi/2$ $\quad d \geq \dfrac{\lambda}{8\sin(\gamma)}$

Po uwzględnieniu wszystkich strat

$$S_K = \frac{P_t G}{4\pi \cdot R^2} \cdot A_0 \cdot \frac{A_e}{4\pi \cdot R^2} \cdot \rho_K^2 \prod_{i=1}^{K-1} \left[ \left(1 - \rho_i^2\right)^2 \cdot \xi_i \cdot \zeta_i \right]$$

$\zeta_i$ - straty związane z rozpraszaniem fali elektromagnetycznej w i-tej warstwie ziemi
$\xi_i$ - straty związane z tłumiennością i-tej warstwy

Typowa głębokość nie przekracza kilku metrów.

W bardzo wilgotnej ziemi pomiar radarem jest praktycznie niemożliwy.

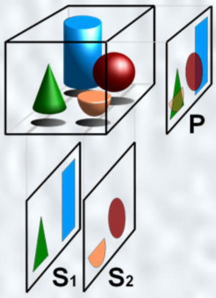
Najlepszym ośrodkami do przeprowadzenia sondowań georadarowych jest suchy piasek.

# Podstawy działania georadarów

# Rodzaje zobrazowań

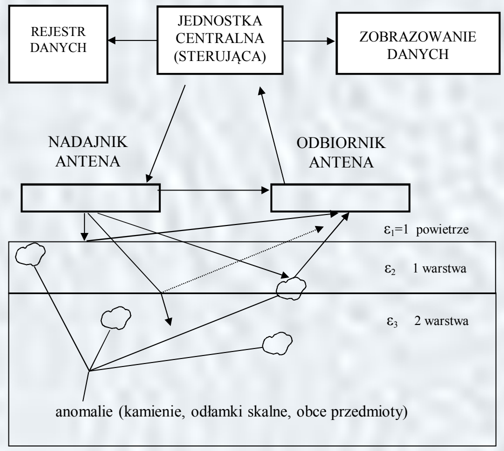
## GPR i jego środowisko pracy

- technika GPR należy do grupy metod skaningowych
  - jest to rodzaj połączenia spektroskopii dielektrycznej z tomografią mikrofalową
    - metody tomograficzne służą generalnie do wykonywania przekrojów obiektów

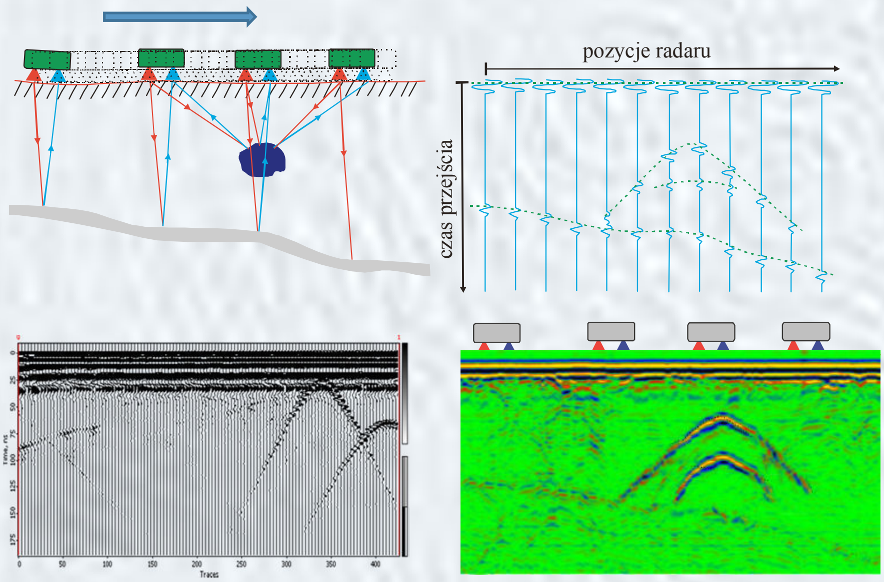



W 1917 r. Johann Radon, że obraz dwu- i trójwymiarowego obiektu można odtworzyć w sposób zupełny z nieskończonej ilości rzutów tego przedmiotu. Pierwsze urządzenia próbujące wykorzystać idee Radona budowali: w 1961 William Henry Oldendorf, w 1963 Allan MacLeod Cormack, w 1968 David Kuhl i Roy Edwards. Pierwszy działający system do diagnostyki zaprezentował Godfrey Hounsfield. Hounsfield i Cormack otrzymali w 1979 roku Nagrodę Nobla za wynalezienie i budowę tomografu komputerowego.

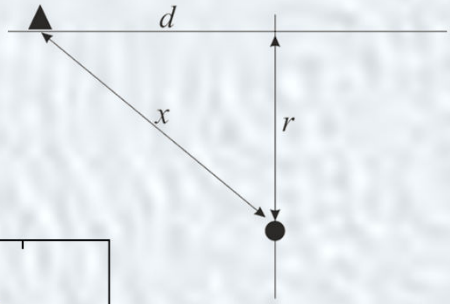
GPR i jego otoczenie

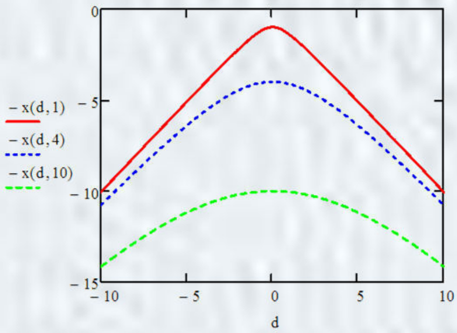



Aby uzyskać przekrój gruntu radar musi się poruszać po jego powierzchni

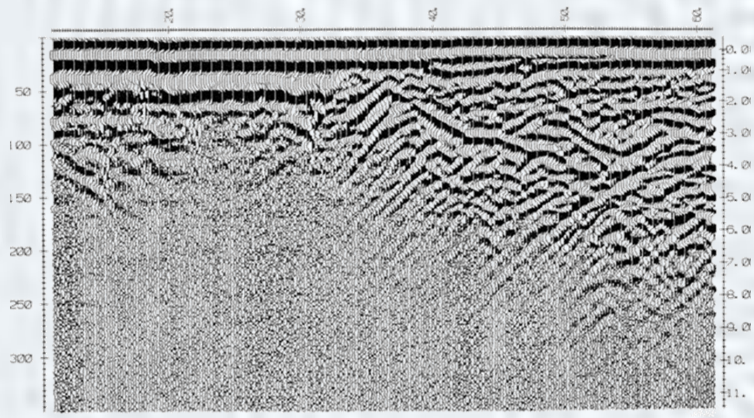


równanie hiperboli dyfrakcyjnej

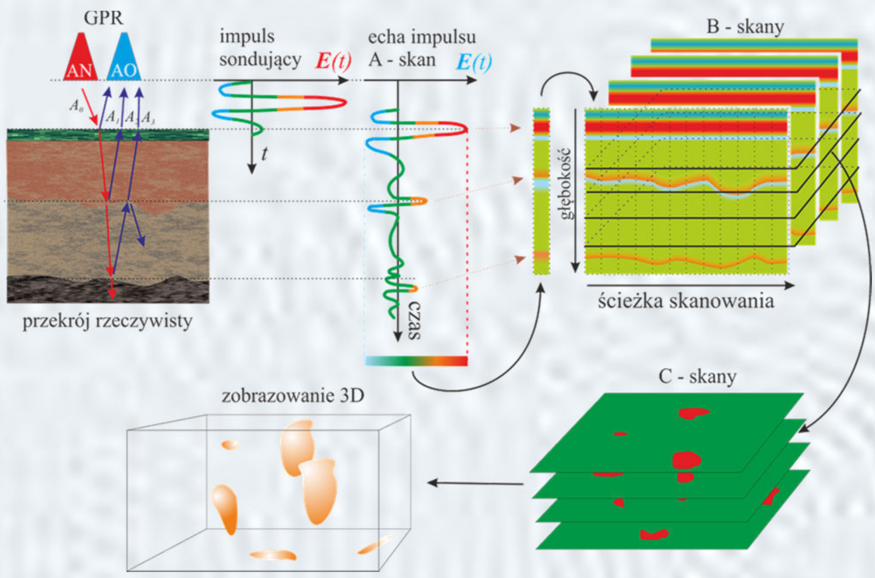


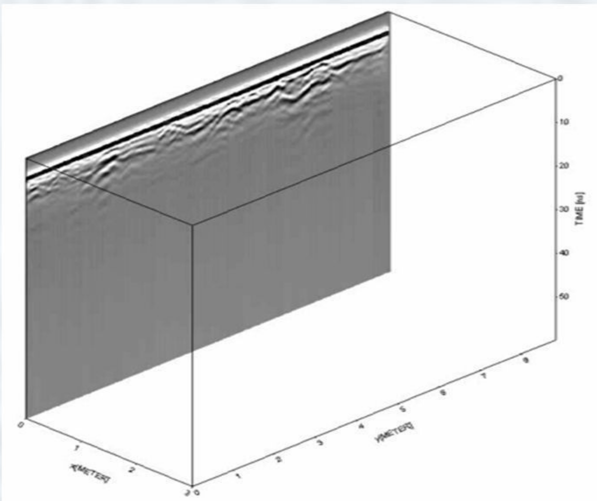



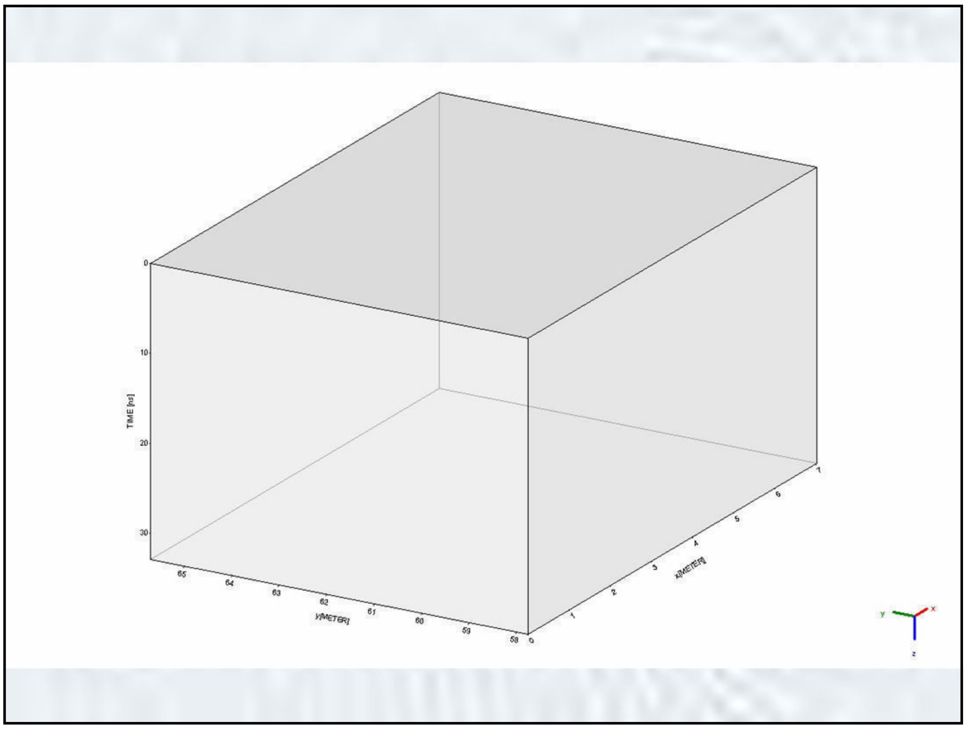

$$x = \sqrt{d^2 + r^2}$$



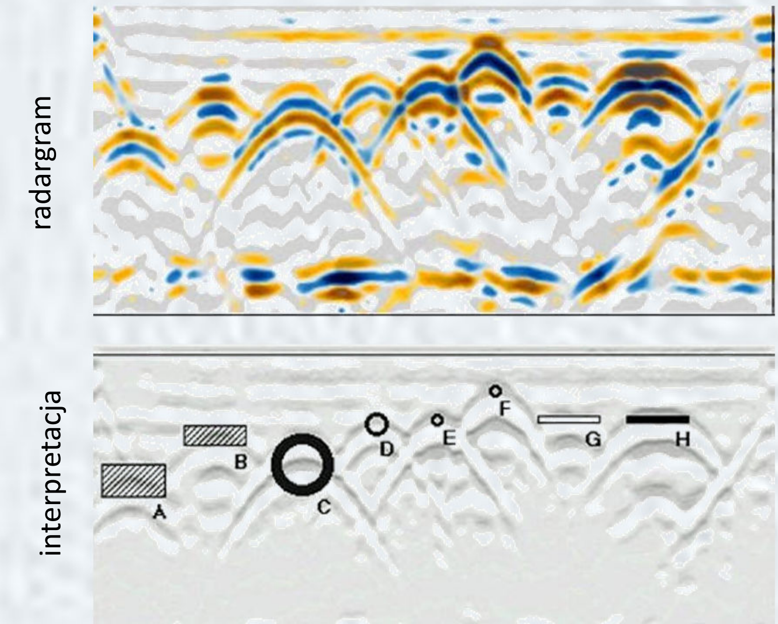
Różne rodzaje zobrazowań GPR

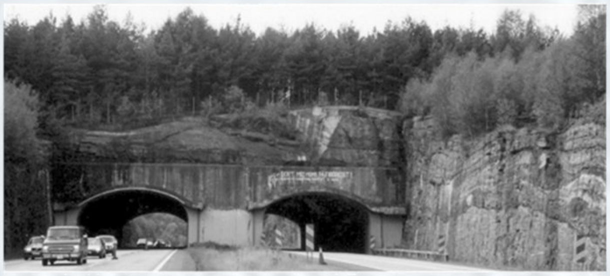


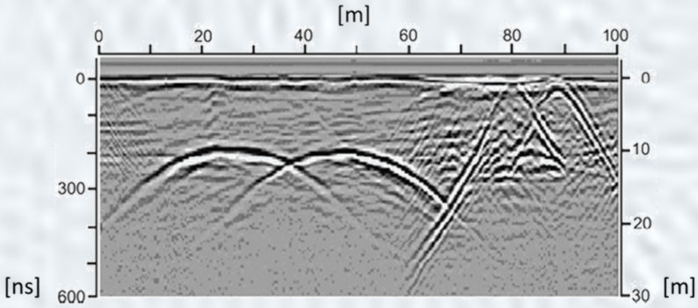



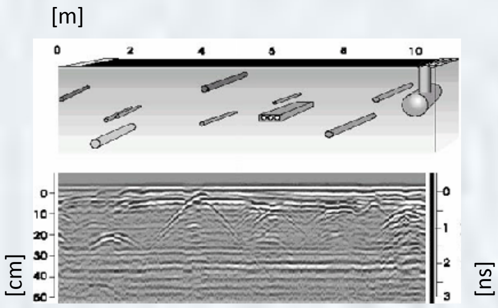


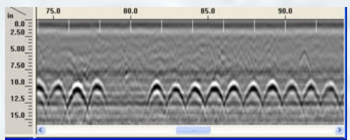
Najtrudniejsza jest interpretacja

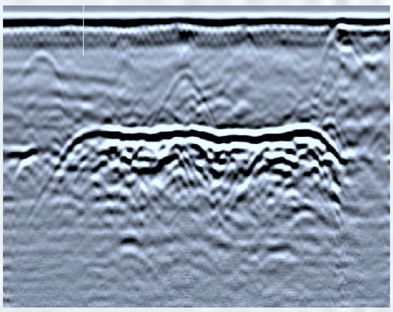





[m]
0
20
40
60
80
100
0
300
600
[ns]
0
10
20
30
[m]


[m]
0
2
4
6
8
10
0
10
20
30
40
50
[cm]
0
1
2
3
[ns]





Podstawowe parametry GPR

rodzaj sygnału sondującego

moc sygnału sondującego

pasmo sygnału sondującego

rozróżnialność odległościowa (pionowa)

rozróżnialność pozioma

dokładność systemu pozycjonowania

Maksymalny zasięg GPR

$$R_{\max} = \sqrt[4]{\frac{P_T G_T G_R \sigma \lambda_0^2}{(4\pi)^3 P_R \varepsilon_r^2 L_T}}$$

$P_T$ – moc emitowana
$G_T$ – zysk anteny nadawczej
$G_R$ – zysk anteny odbiorczej
$\sigma$ – skuteczna powierzchnia odbicia
$\lambda_0$ – długość fali na częstotliwości środkowej
$P_R$ – moc na wejściu odbiornika
$\varepsilon_r$ – przenikalność względna ośrodka
$L_T$ – sumaryczne straty energii

Sumaryczne straty w mierze decybelowej:

$$L_T = L_e + L_m + L_{t1} + L_{t2} + L_s + L_a + L_{sc}$$

$L_e$ - straty energii w systemie antenowym,

$L_m$ - straty związane z niedopasowaniem systemu antenowego do nadajnika,

$L_{t1}$ - straty transmisji związane z propagacją z powietrza do ośrodka geologicznego,

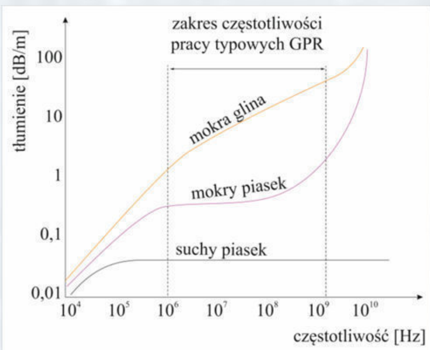
$L_{t2}$ - straty transmisji związane z propagacją z ośrodka geologicznego do powietrza,

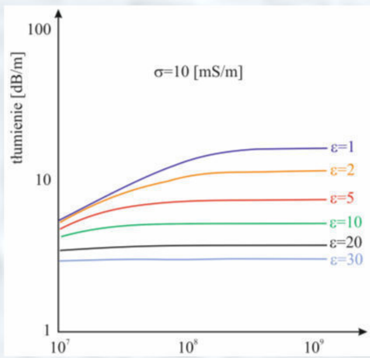
$L_s$ - straty związane z rozprzestrzenianiem się energii „spreading”,

$L_a$- straty związane z tłumieniem energii w ośrodku geologicznym,

$L_{sc}$ - straty związane z procesem odbicia od obiektu

tłumienie energii w ośrodku geologicznym



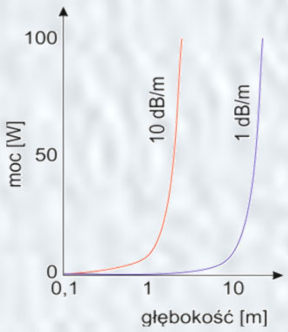

| częstotliwość środkowa [GHz] | maks. zasięg głębokościowy [m] | maks. rozróżnialność pionowa [cm] |
|---|---|---|
| 0,5 | 6 | 8 |
| 0,9 | 2 | 4 |
| 1,4 | 0,5 | 2 |
| 2,0 | 0,15 | 1 |

pasmo z reguły dobierane jest wg zależności

$$2 \cdot \frac{f_H - f_L}{f_H + f_L} \geq 0,2$$

$f_L$ , $f_H$ 3 dB dolna i górna częstotliwość graniczna

Zasięg bardziej zależy od tłumienia niźli emitowanej mocy




Współczynnik skuteczności

Wartość $SP$ decyduje o zasięgu głębokościowym georadaru

$$SP[\mathrm{dB}] = 10\log\frac{P_t}{P_{MDS}}$$

$P_t$ – moc średnia nadajnika

$P_{MDS}$ – czułość odbiornika (*Minimum Detectable Signal*)

$$P_{MDS} = k\,T_0\,B_{p.cz.}\,F\left(\frac{S}{N}\right)_{\min}$$

$B_{p.cz.}$ - pasmo demodulatora,

$F$ - współczynnik szumów obwodów wejściowych odbiornika,

$(S/N)_{\min}$ - progowy stosunek poziomu sygnału do poziomu szumu na wejściu

*SDR - System Dynamic Range*

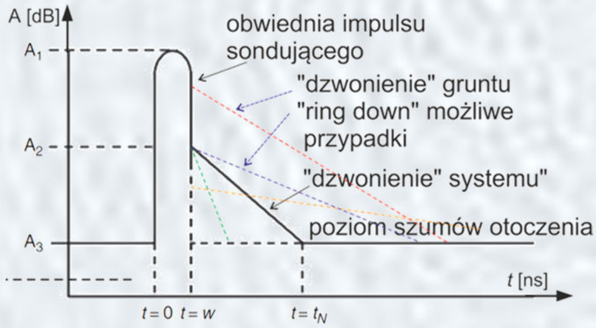
Parametr ten, obok tego, że może posłużyć do określania zasięgu georadaru, jest także przydatny przy porównywaniu parametrów georadarów działających na różnych zasadach.

$$SDR = \frac{\overline{P}\ \tau\, G^2}{k\, T_0\, F \left(\frac{S}{N}\right)_{\min}}$$

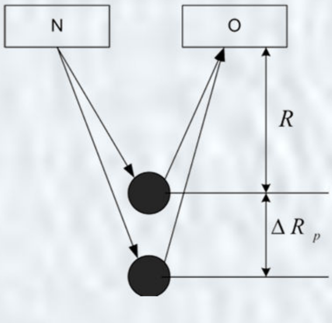
$\overline{P}$ średnia moc nadajnika,
$\tau$ - czasem integracji,
$G$ – zysk energetyczny anteny

| Typ GPR | ≈ SDR [dB] |
|---|---|
| Impulsowy z próbkowaniem w czasie rzeczywistym | 132 |
| Impulsowy z próbkowaniem sekwencyjnym | 92 |
| SFCW | 92 |
| SFCW z korekcją | 122 |
| FMCW | 102 |
| FMCW z korekcją | 132 |

Zakres dynamiczny GPR



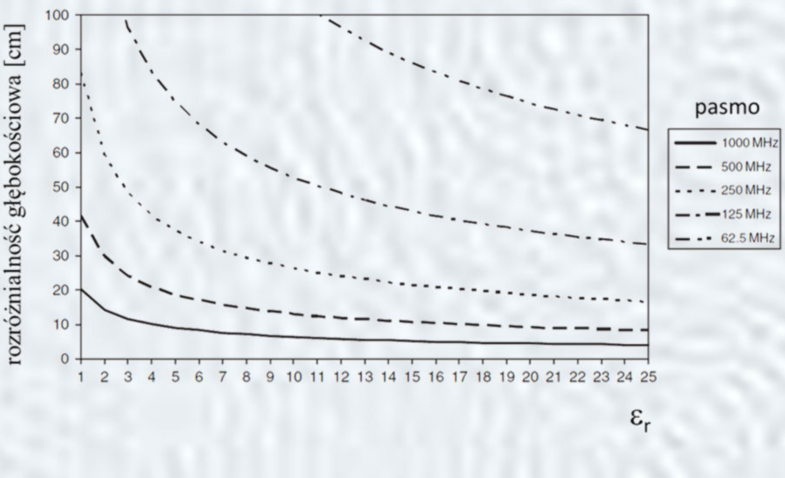
Rozdzielczość GPR



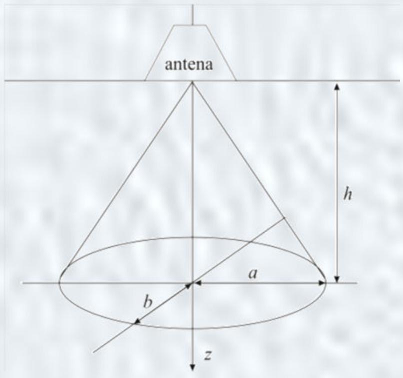

$$\Delta R_{pion} = \frac{v}{2B} = \frac{c}{2B\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

$$\Delta R_{poz} = \sqrt{\frac{R \cdot \lambda}{2}}$$

Zależność rozróżnialności głębokościowej od przenikalności dla systemów o różnych pasmach



Rozróżnialność pozioma na określonej głębokości określana jest tzw. śladem pokrycia anten (ang. footprint)

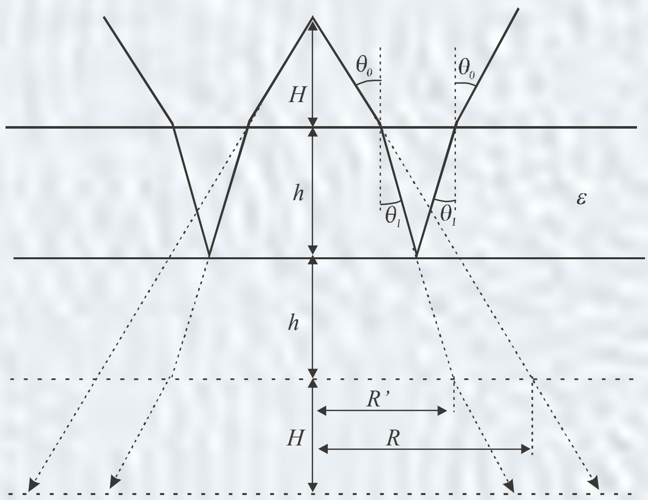



$$b = \frac{a}{2} \qquad a = \frac{\lambda}{4} + \frac{h}{\sqrt{\varepsilon_r - 1}}$$

Rozróżnialność pozioma zależy także od tłumienia fal e-m w ośrodku.
Poprawia się ona wraz ze wzrostem tłumienia - tzw. ogniskujące właściwości warstwy geologicznej

Ogniskowanie

Ślad pokrycia na określonej głębokości w ośrodku geologicznym jest mniejszy niż w wolnej przestrzeni w analogicznej odległości.



Zmniejszenie śladu pokrycia w warstwie geologicznej wynosi:

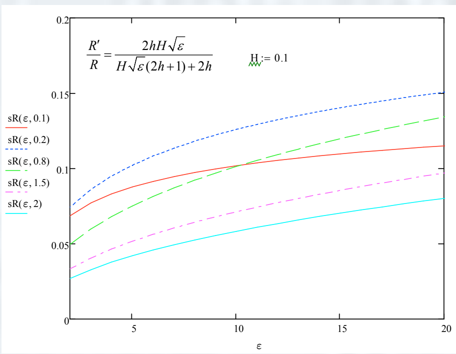
$$\frac{R'}{R}=\frac{\dfrac{H}{2h+1}}{\dfrac{H}{2h}+\dfrac{tg\theta_1}{tg\theta_0}}<1$$

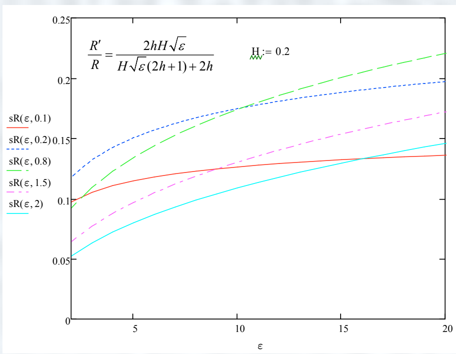
Przy małej wartości kąta $\theta_0$, tzn. wąskiej charakterystyce kierunkowej anteny można przyjąć

$$\frac{tg\theta_1}{tg\theta_0}\approx\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

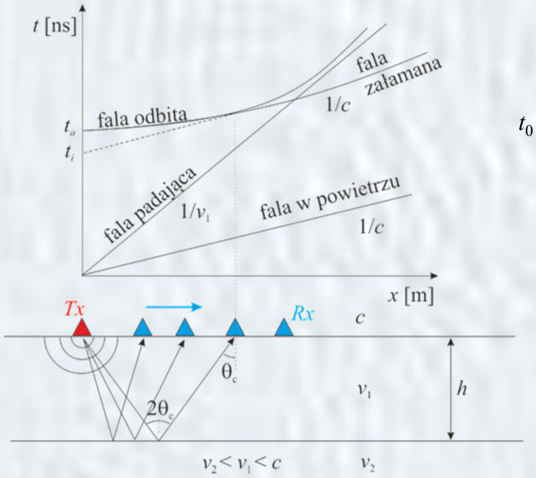
co upraszcza wyrażenie na zmniejszenie śladu pokrycia do postaci:

$$\frac{R'}{R}=\frac{2hH\sqrt{\varepsilon}}{H\sqrt{\varepsilon}(2h+1)+2h}$$



Pomiar prędkości metodą WARR (Wide Angle Reflection and Refraction)



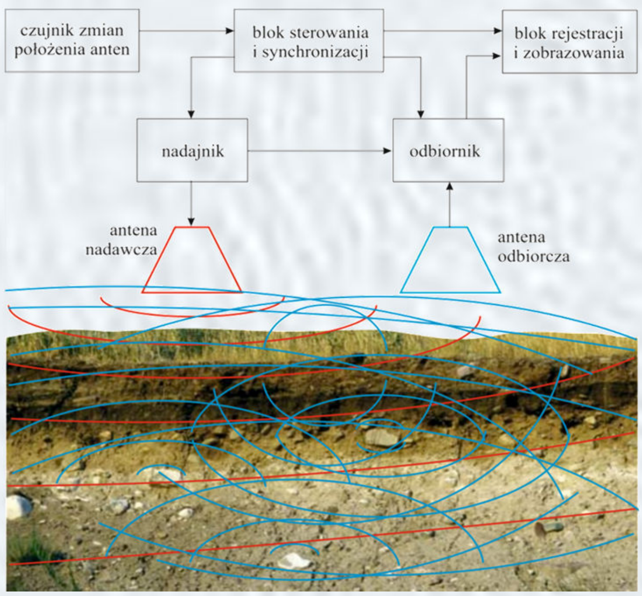

$$h = \frac{v_1 t_0}{2}$$

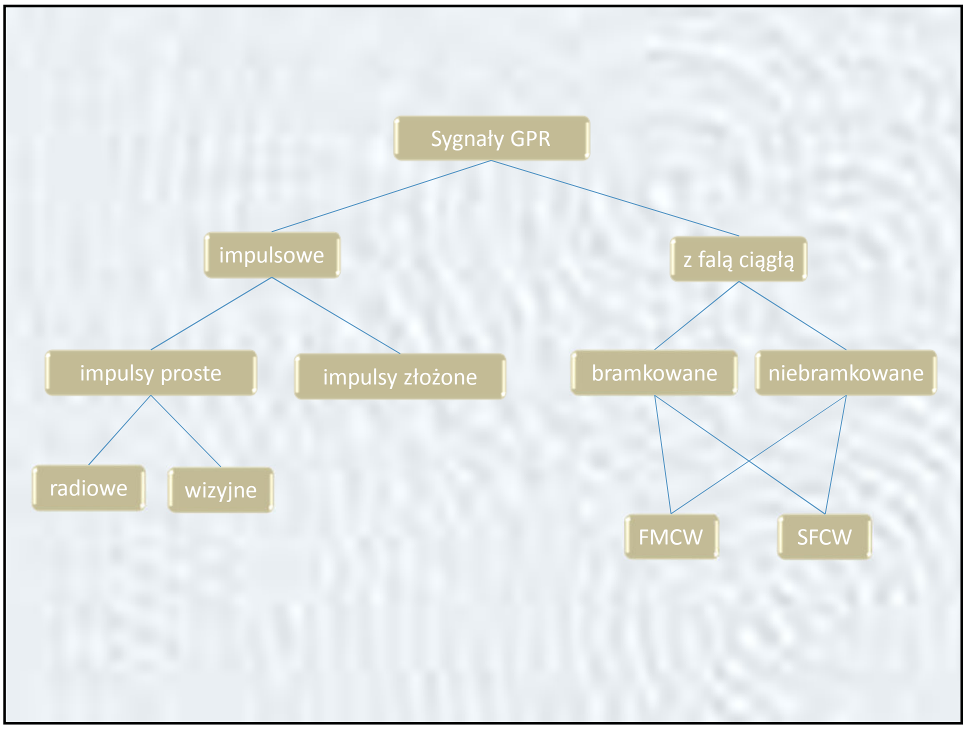
$t_0$ czas dla zerowej odległości anten

$$h = \frac{v_1 t_i}{2\cos\theta_c} = \frac{t_i v_1 c}{2\sqrt{c^2 - v_1^2}}$$

$$v_1 = \frac{\sqrt{x^2 + 4h^2}}{t_i}$$

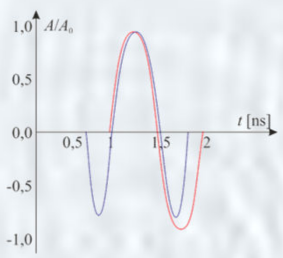
Ogólny schemat funkcjonalny GPR

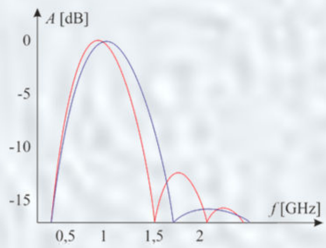





## GPR w dziedzinie czasu

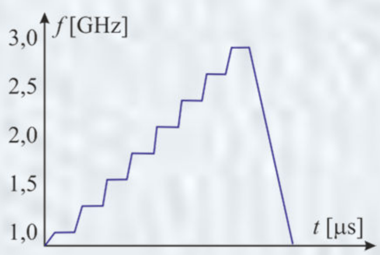
im krótszy impuls - tym szersze pasmo

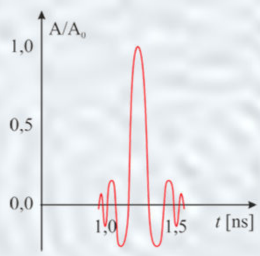


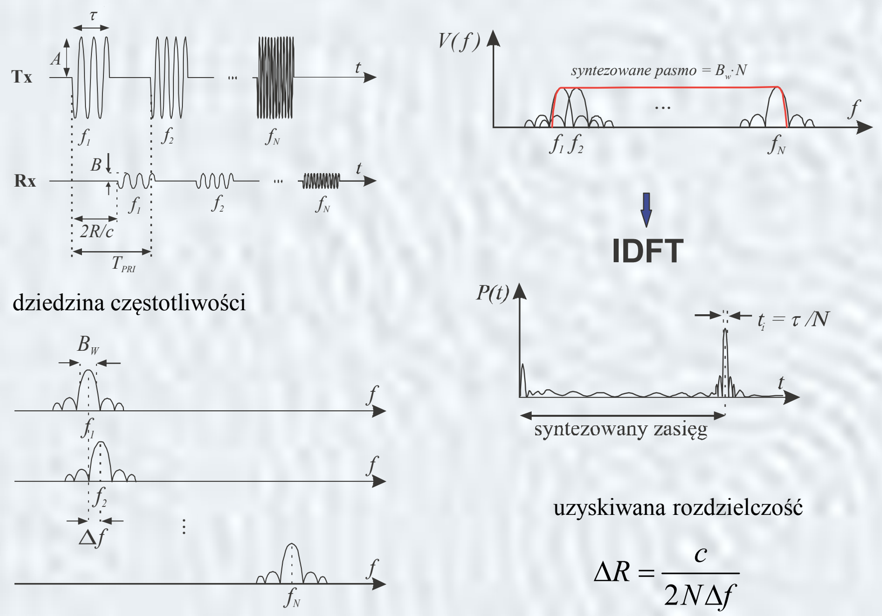

## GPR w dziedzinie częstotliwości

synteza impulsu



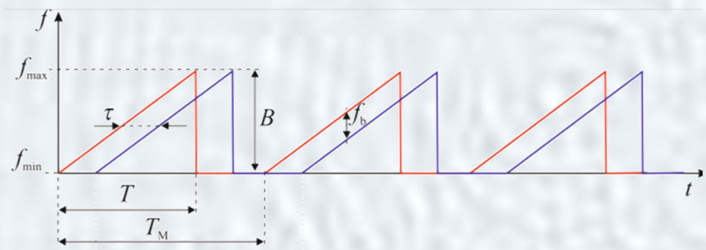



## Proces syntezy impulsu w radarze z SFCW




$$\Delta R = \frac{c}{2N\Delta f}$$

## GPR z FMCW




$$\tau = \frac{2R}{v} \qquad f_b = \frac{B \cdot \tau}{T}$$

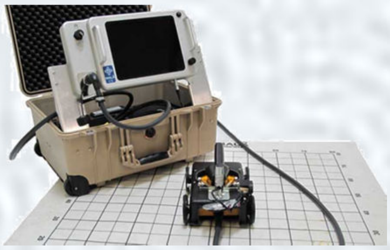
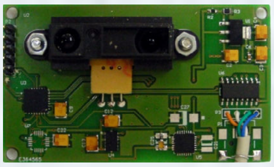
$f_b$ – zawiera informację o odległości do celu

Ponieważ celów jest zwykle więcej na mieszaninie częstotliwości różnicowych należy wykonać FFT – prążki widma reprezentują cele

Układy pozycjonowania

GPS – wciąż zbyt niedokładny

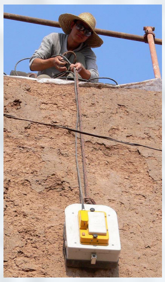


Różne nośniki




Różne nośniki cd.



Dziękuję za uwagę

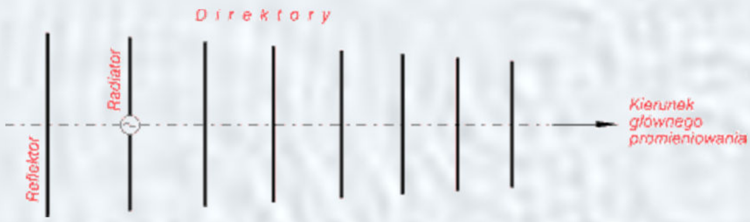
# Anteny georadarowe

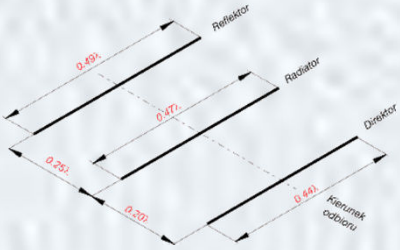
Pożądane parametry anten GPR

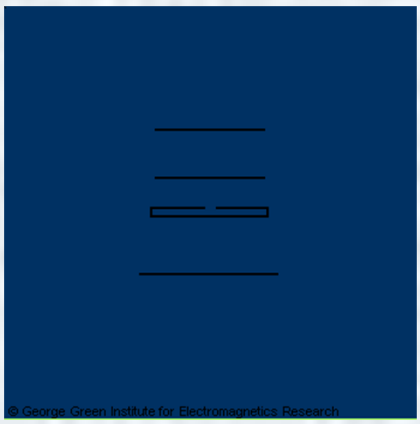
- płaska charakterystyka amplitudowa
- liniowa charakterystyka fazowa
- ultraszerokie pasmo pracy
- krótka odpowiedź impulsowa
- stałe centrum fazowe
- niewielki ciężar
- dobra wytrzymałość mechaniczna
- odporność na warunki atmosferyczne

nie istnieje antena spełniająca ww. kryteria

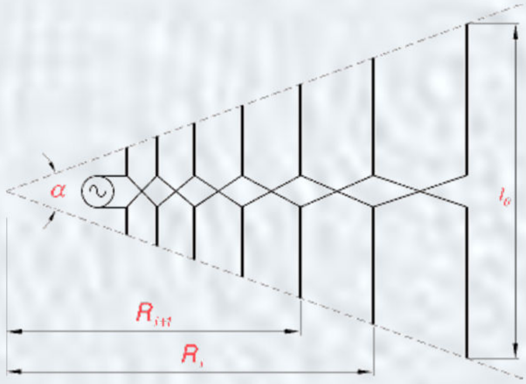
Anteny wielodipolowe – sposób na uzyskanie szerszego pasma pracy



Antena logoperiodyczna

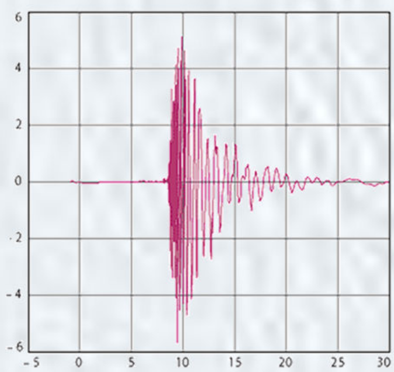



duża stałość charakterystyk promieniowania w bardzo szerokim zakresie częstotliwości, mały poziom wiązek bocznych i mała wrażliwość anten na zmienne warunki atmosferyczne

Odpowiedź impulsowa anteny

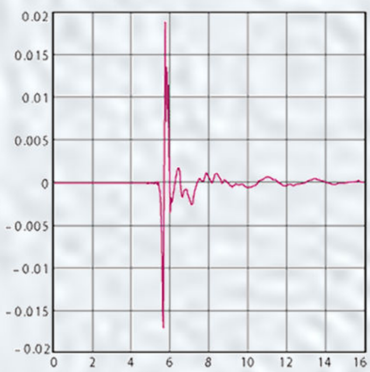
Wymuszenie 0,5 ns monocyklem o kształcie Gaussa

*A* [mV] antena logoperiodyczna



*t* [ns]

*A* [mV] antena Vivaldi



*t* [ns]

Jak maksymalnie skrócić odpowiedź?

Niech charakterystyki impulsowe dwuwrotników modelujących układ antena – grunt mają postać typową dla filtrów środkowo- i dolnoprzepustowego o pasmach odpowiednio $B_S$ i $B_D$ oraz częstotliwości środkowej $\omega_0$ :

$$g_S(t) = B_S e^{-\frac{B_S t}{2}} cos\,\omega_0 t - \frac{B_S}{2\omega_0} sin\,\omega_0 t$$

$$g_D(t) = B_D e^{-B_D t}$$

Impulsowa charakterystyka takiego tandemu będzie więc miała postać funkcji splotu:

$$G(t) = \int_0^t g_D(\tau) g_S(t-\tau) d\tau$$

Po wykonaniu całkowania:

$$G(t) = \frac{B_S}{2\left(B_S^2 + 4\omega_0^2\right)\omega_0} 4\omega_0 B_S + sin\,\omega_0 t \cdot e^{-B_D t} B_S^2 + 4\,sin\,\omega_0 t \cdot e^{-B_D t}\omega_0^2 +$$

$$2e^{-\frac{1}{2}B_S t}\omega_0 B_S\, cos\,\omega_0 t + 8 \cdot e^{-\frac{1}{2}B_S t}\omega_0^2\, sin\,\omega_0 t + sin\,\omega_0 t \cdot B_S^2 + 4\,sin\,\omega_0 t \cdot \omega_0^2$$

Przy założeniu $B_S \approx B_D \gg 20\%\,\omega_0$

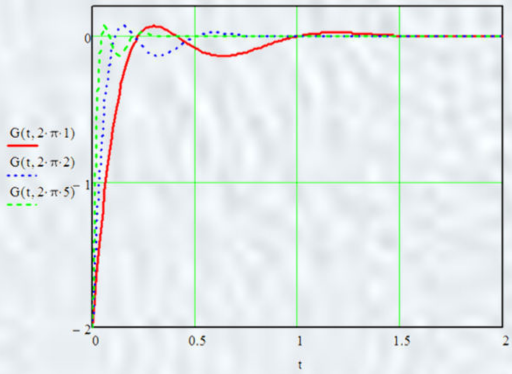
odpowiedź impulsowa układu antena-grunt upraszcza się do postaci

$$G(t) \sim e^{-\frac{1}{2}\omega_0 t} sin(\omega_0 t) - 2e^{-\omega_0 t}$$

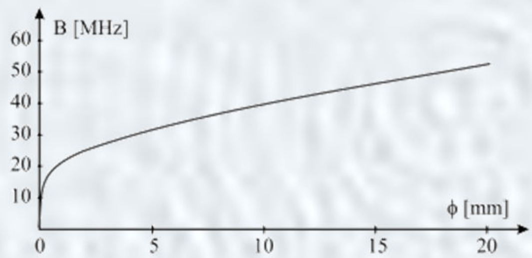
Postać ta nie zależy od pasm a jedynie od pulsacji środkowej

Wzrost częstotliwości środkowej powoduje skracanie odpowiedzi impulsowej układu

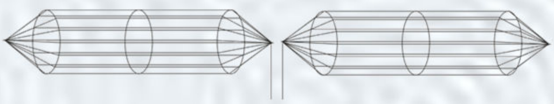
częstotliwość w [GHz], czas w [ns]




Dipole szerokopasmowe

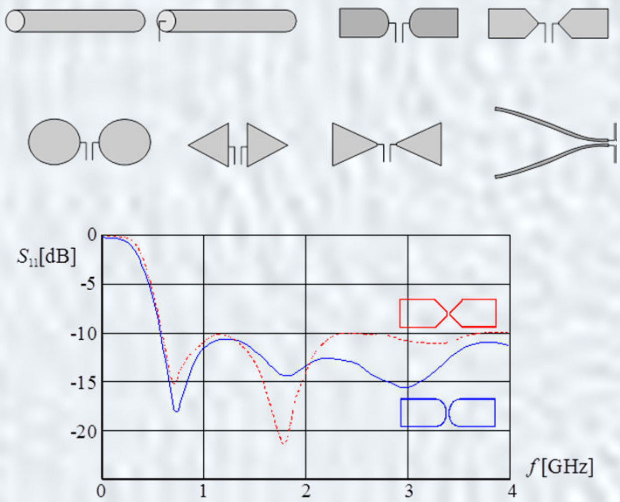


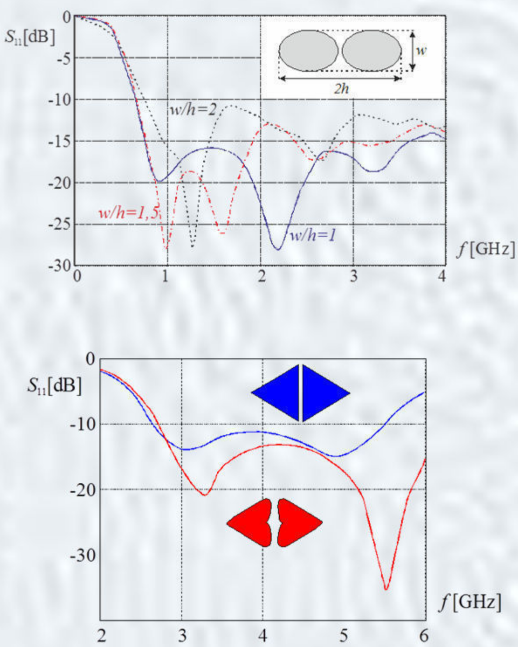

Pasmo dipola zależy od jego średnicy

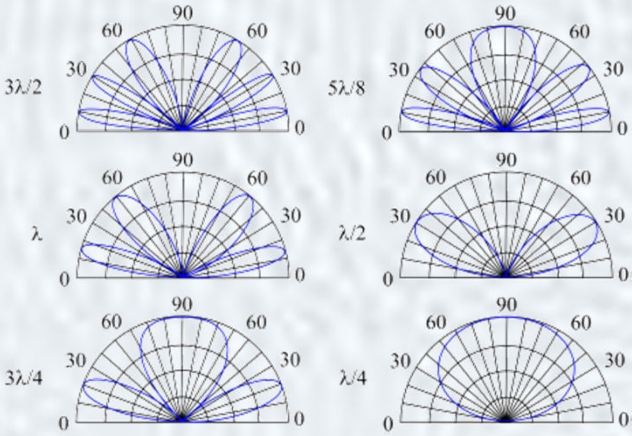
Диполь Надененко

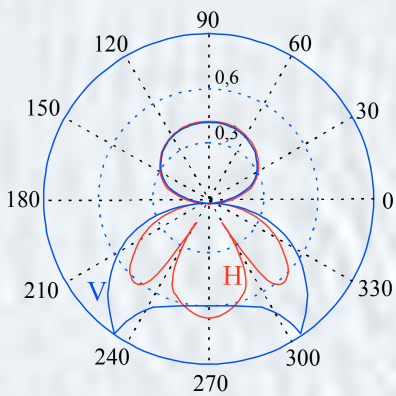
Różne konstrukcje dipoli szerokopasmowych



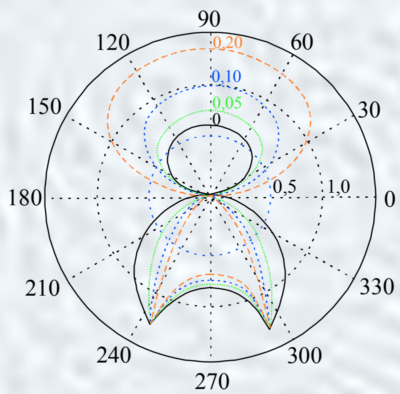



Charakterystyki horyzontalne dipola zawieszonego poziomo nad ziemią dla sześciu różnych wysokości



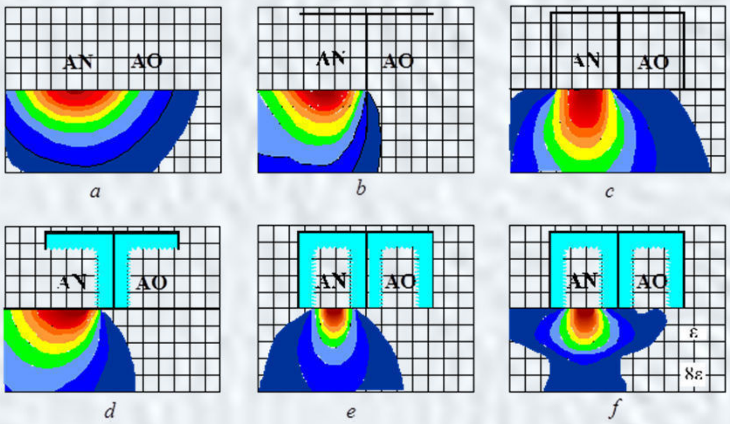




Charakterystyki promieniowania dipola półfalowego leżącego na suchym piasku

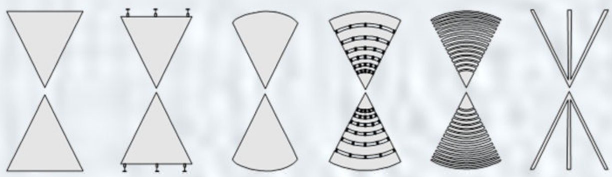


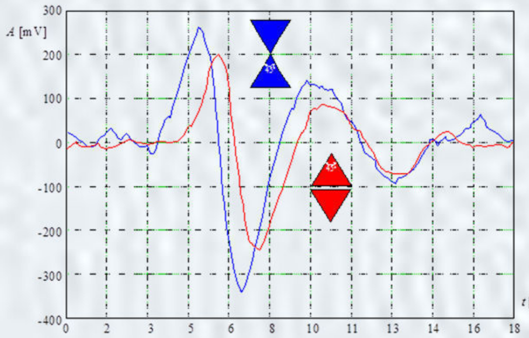

Zależność wertykalnej charakterystyki promieniowania od wysokości zawieszenia dipola półfalowego (wyr. w długościach fali)

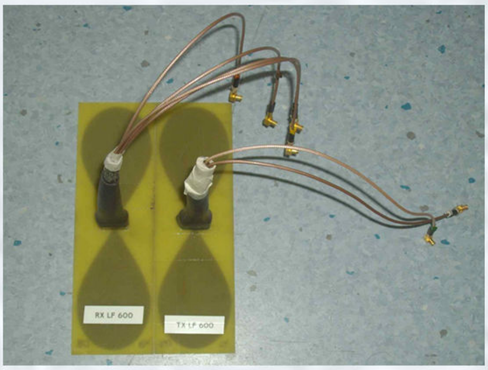
Rozkład pola w ziemi dla dipoli bez ekranu i ekranowanych

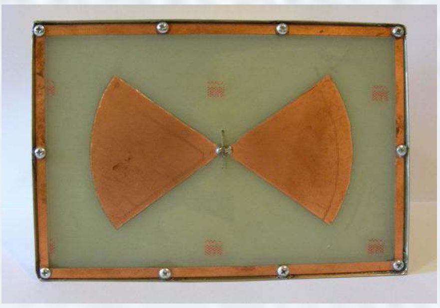


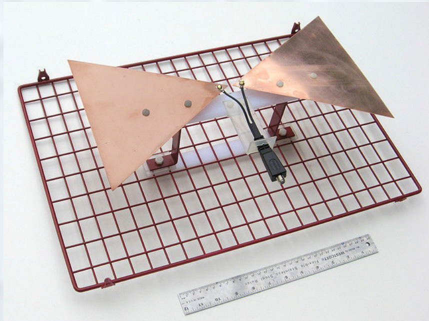

Bow-tie - modyfikacje



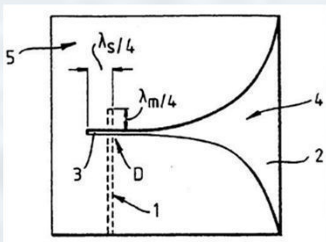


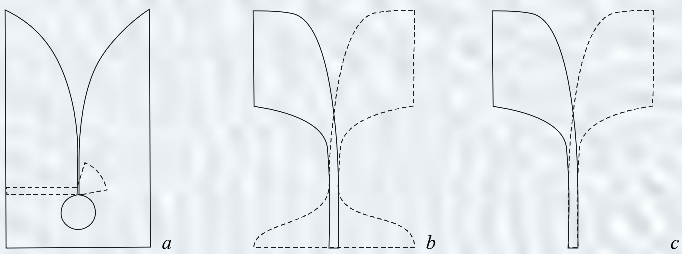




Konstrukcje Vivaldi



Kształt anteny musi spełniać warunek samoskalowalności

$$K\,x(y,z) = x(y+C, z+D) \qquad (1)$$

$K$, $C$ i $D$ – czynniki skali

Działając na warunek (1) operatorami $\frac{\partial}{\partial C}, \frac{\partial}{\partial D}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z},$

otrzymuje się układ czterech równań o postaci:

$$x(y,z)\frac{\partial K}{\partial u} = \frac{\partial x(y+C, z+D)}{\partial u} \qquad (2)$$

gdzie $u$ oznacza $C$, $D$, $y$ lub $z$

Układ czterech równań (2) można łatwo zredukować do układu dwóch równań:

$$\begin{aligned} K\frac{\partial x(y,z)}{\partial y} &= x(y,z)\frac{\partial K}{\partial C} \\ K\frac{\partial x(y,z)}{\partial z} &= x(y,z)\frac{\partial K}{\partial D} \end{aligned} \qquad (3)$$

posiadającego rozwiązanie w postaci

$$x(y,z) = x_0 e^{ay+bz}$$

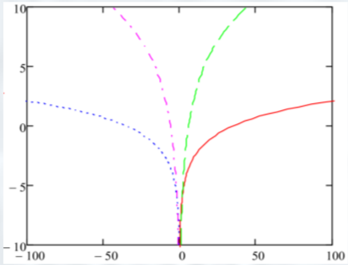
gdzie $\quad a = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial C} \quad b = \frac{1}{K}\frac{\partial K}{\partial D} \quad x_0 = const$

Po wstawieniu do warunku samoskalowalności otrzymuje się dla struktur planarnych ($z = 0$) następującą geometrię anteny

$$x(y) = \pm\bar{x}_0 e^{ay}$$

$a$ jest współczynnikiem rozszerzania się geometrii struktury
$\bar{x}_0$ połowa szerokości apertury na końcu anteny

Zestawiając ze sobą pary parametrów $x_0$ oraz $a$ otrzymuje się gotową geometrię anteny



Impedancja wejściowa anteny
Powinna wynosić 50 Ω

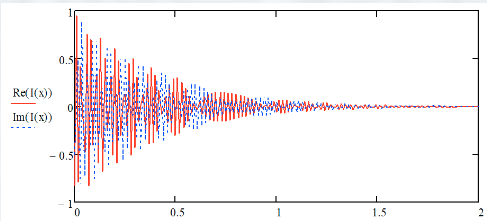
Dla takiego profilu model rozkładu prądu dla zadanej długości fali wyraża się poprzez:

$$i\left[s(x)\right] = i_0 e^{-\frac{a}{p}s(x)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}s(x) - s(x_K)\right] + j\sin\left[\frac{2\pi}{\lambda}s(x) - s(x_K)\right]$$

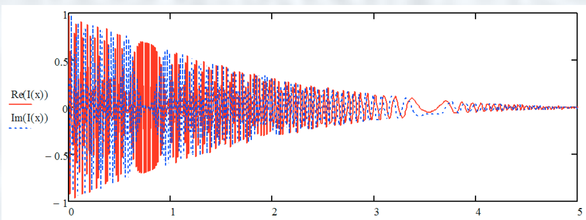
$x_K$ współrzędna końca anteny

$p$ parametr opisujący zanik prądu

Zanik prądu w antenie dla różnych wartości parametru p

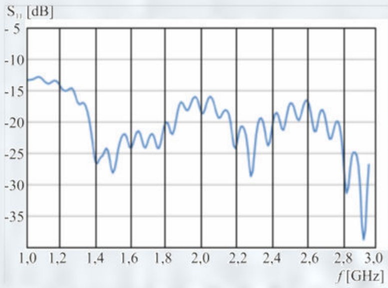


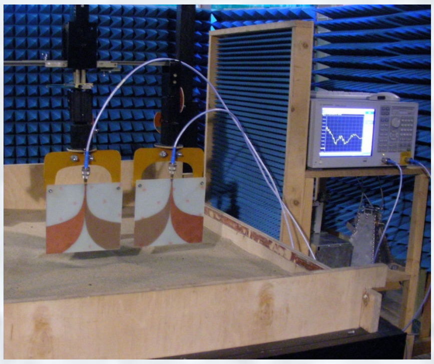

$p = 2$

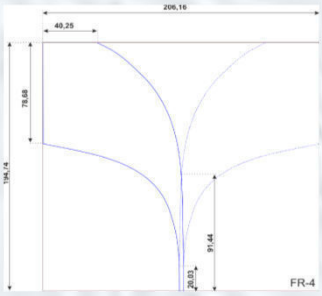



$p = 10$

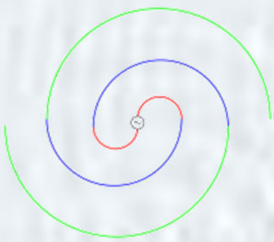
Aperturę można „bezkarnie” zakończyć w miejscu zaniku prądu



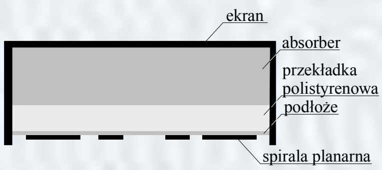



Anteny spiralne

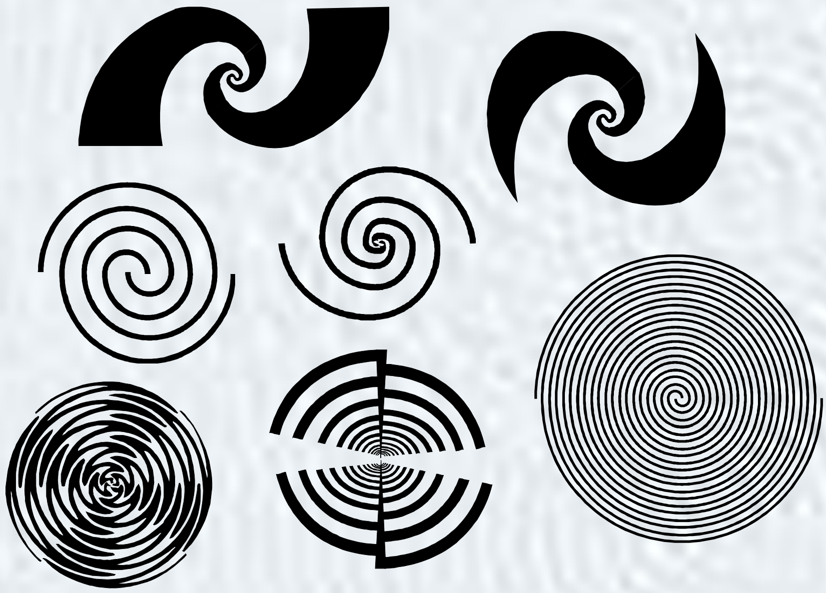


$$B = \frac{c}{2\pi}\left(\frac{1}{r_{min}} - \frac{1}{r_{max}}\right)$$

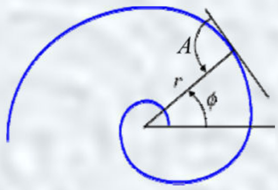
c – prędkość fali w antenie



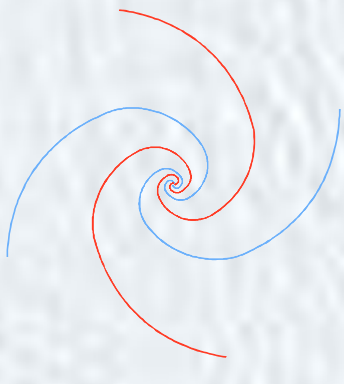
geometrie podlegają warunkom samoskalowalności



$$r(\phi) = ke^{\alpha\phi} \qquad L = \int_{r_0}^{r} \sqrt{r^2 \left(\frac{d\phi}{dr}\right)^2 + 1}\; dr$$




$$A = \frac{1}{tg\alpha}$$



$$r_1(\phi) = ke^{\alpha\phi} \qquad r_2(\phi) = ke^{\alpha(\phi-\delta)}$$

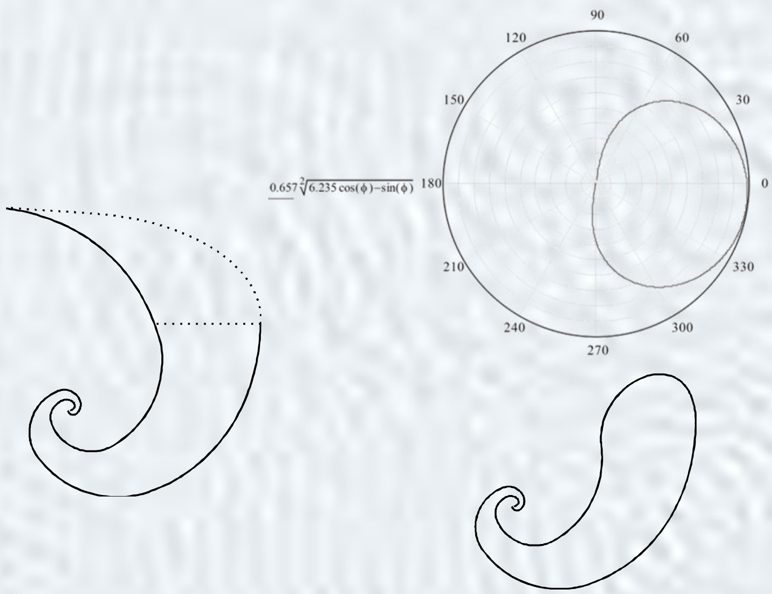
$$r_3(\phi) = ke^{\alpha(\phi-\pi)} \qquad r_4(\phi) = ke^{\alpha(\phi-\pi-\delta)}$$

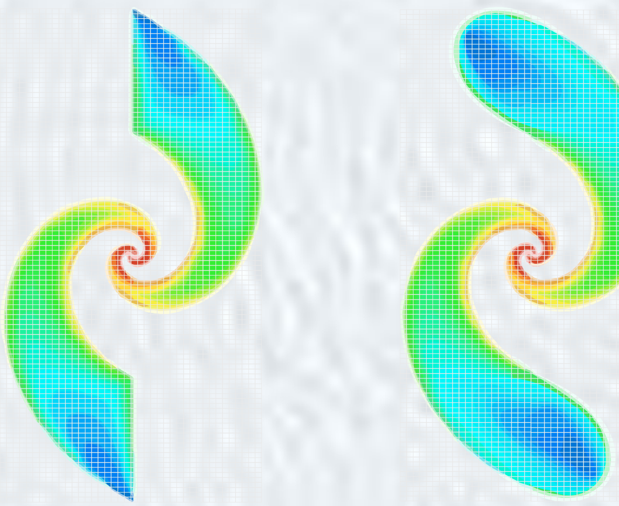
$$\frac{r_2}{r_1} < 1 \qquad \frac{r_4}{r_3} < 1 \qquad \langle 0{,}37; 0{,}97 \rangle$$

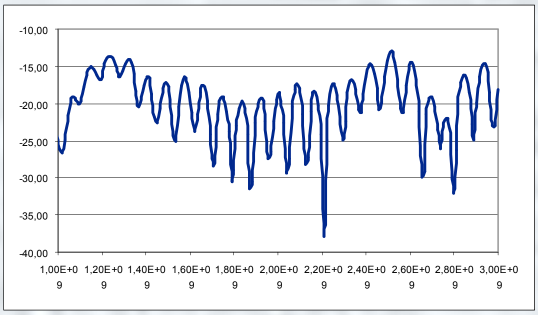
$$\alpha \in \langle 0{,}2; 1{,}2 \rangle$$

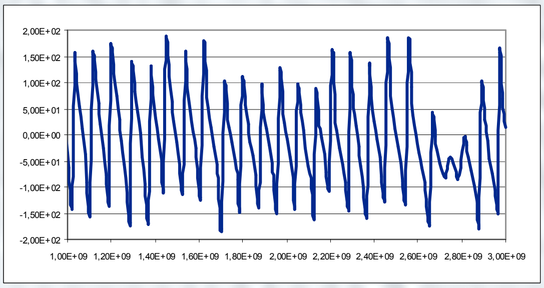
26/17

zakończenie geometrii następuje w miejscu występowania min. prądu

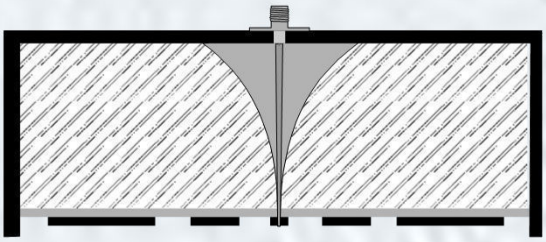


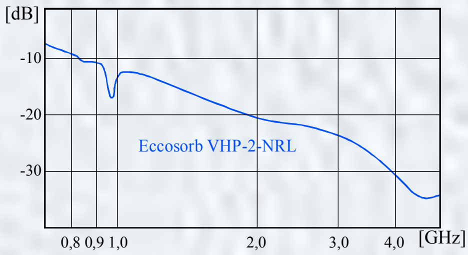




-10,00
-15,00
-20,00
-25,00
-30,00
-35,00
-40,00
1,00E+09 1,20E+09 1,40E+09 1,60E+09 1,80E+09 2,00E+09 2,20E+09 2,40E+09 2,60E+09 2,80E+09 3,00E+09


2,00E+02
1,50E+02
1,00E+02
5,00E+01
0,00E+00
-5,00E+01
-1,00E+02
-1,50E+02
-2,00E+02
1,00E+09 1,20E+09 1,40E+09 1,60E+09 1,80E+09 2,00E+09 2,20E+09 2,40E+09 2,60E+09 2,80E+09 3,00E+09

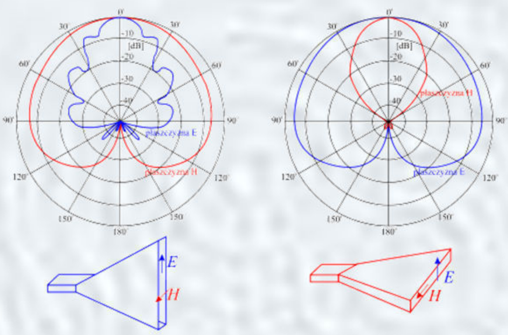
29/17

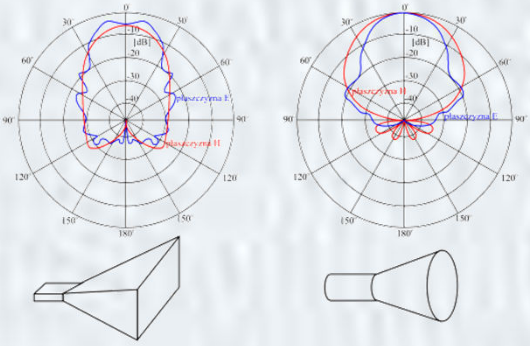



[dB]
-10
-20
-30
Eccosorb VHP-2-NRL
0,8 0,9 1,0
2,0
3,0
4,0
[GHz]

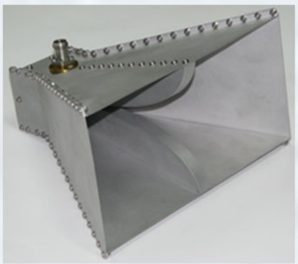
30/17

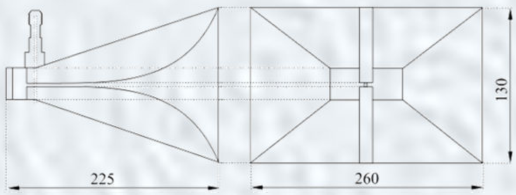
Anteny tubowe

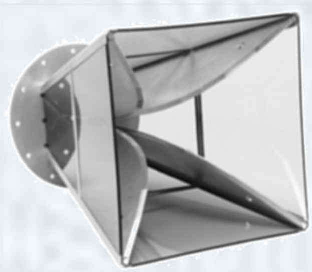


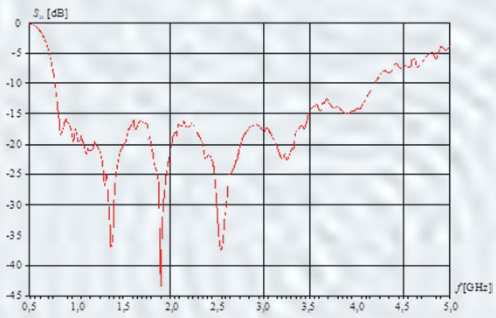




Konstrukcje grzbietowe





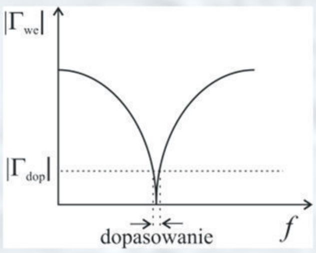


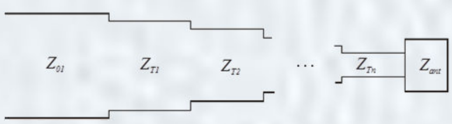
Porównanie anten

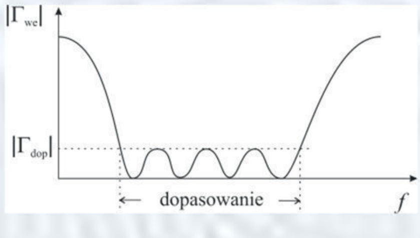
| | dipole grube | dipole planarne | tuby | Vivaldi |
|---|---|---|---|---|
| względne pasmo | wąskie | dość szerokie | szerokie | szerokie |
| kierunkowość | niska | niska | wysoka | wysoka |
| poziom sprzężenia między antenami | niski | wysoki | niski | średni |
| impedancja wejściowa | wysoka | wysoka | niska | średnia |
| złożoność technologiczna | średnia | niska | wysoka | niska |
| realizacja obciążenia apertury | trudna | średnia | trudna | trudna |
| realizacja ekranowania | łatwa | łatwa | trudna | trudna |

Szerokopasmowe układy dopasowania anten

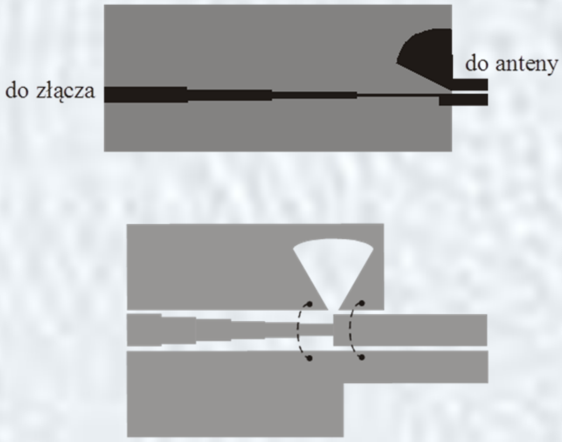
$$|\Gamma_{we}| = \frac{Z_{02} - Z_{01}}{\sqrt{(Z_{02} + Z_{01})^2 + 4Z_{01}Z_{02}tg^2\beta l}}$$



Przykłady realizacji




Dziękuję za uwagę

# Impulsowe GPR

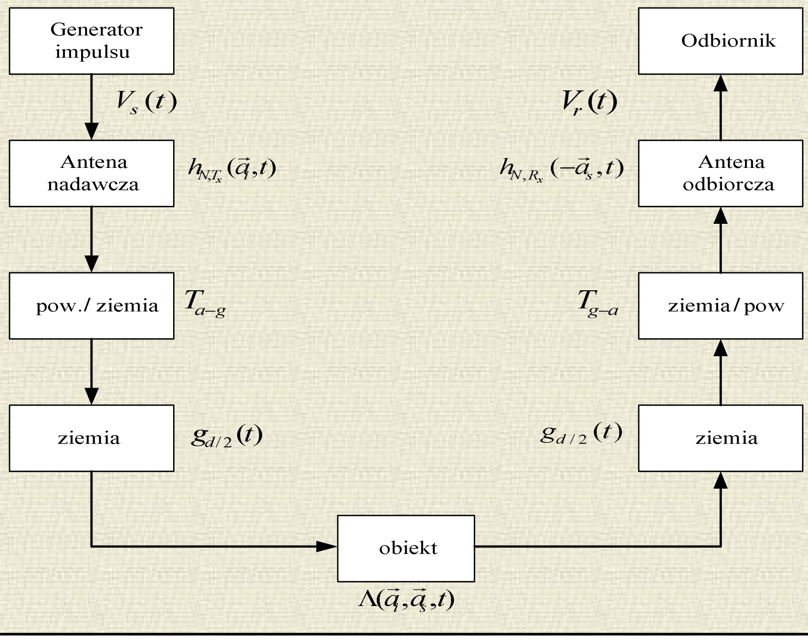
Najpopularniejsze radary komercyjne

GPR osiągające najwyższe wartości SDR

Trudności z generacją ultrakrótkich impulsów

Trudności z szybkim próbkowaniem

## Model systemu radarowego pracującego w dziedzinie czasu



$$V_r(t) = \frac{T_{a-g} T_{g-a}}{8\pi^2 R_t R_r c} g_d(t) * h_{N,T_x}(a_i, t) * \Lambda_{1,1}(a_i, a_s, t) * h_{N,R_x}(-a_s, t) * \frac{dV_s(t)}{dt}$$

$V_r(t)$ – napięcie na wyjściu anteny odbiorczej

$V_s(t)$ – napięcie pobudzające antenę nadawczą

$a_i$ – wektor falowy propagacji fali e-m od anteny do obiektu

$a_s$ – wektor falowy propagacji fali e-m od obiektu do anteny

$g_d(t)$ – odpowiedź impulsowa gleby z uwzględnieniem strat i dyspersji

$h_{N,\,Tx}(a_i, t)$ – znormalizowana odpowiedź anteny w kierunku nadawania

$h_{N,\,Rx}(-a_s, t)$ – znormalizowana odpowiedź anteny w kierunku odbiorczym

$\Lambda$ $(a_i, a_{s,}\ t)$ – znormalizowana odpowiedź obiektu (zależna od jego powierzchni skutecznej)

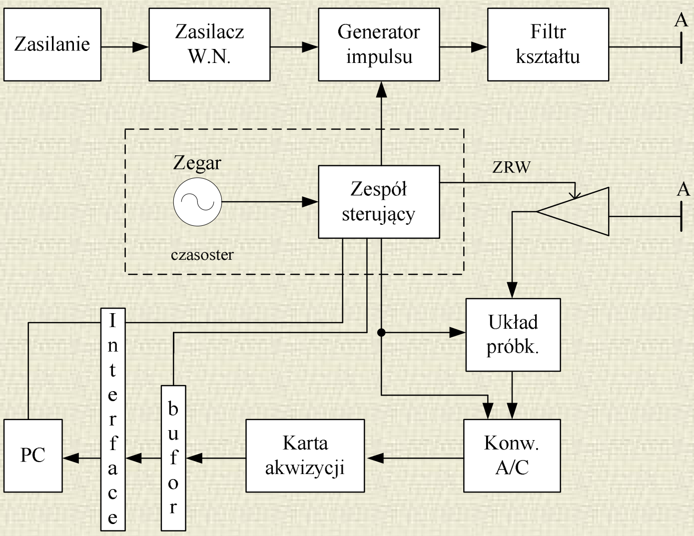
$R_t$ – odległość anteny nadawczej od obiektu

$R_r$ – odległość anteny odbiorczej od obiektu

$T_{a\text{-}g}$ – współczynnik transmisji (propagacji) z powietrza do gleby

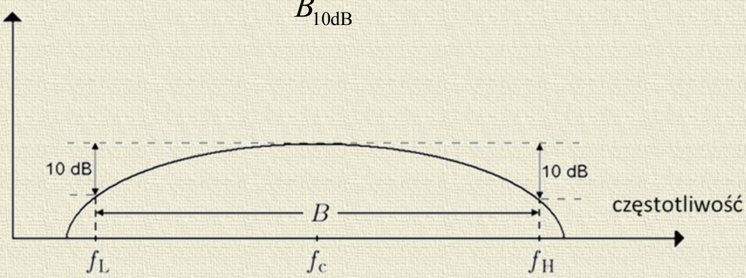
$T_{g\text{-}a}$ – współczynnik transmisji (propagacji) z gleby do powietrza

## Schemat funkcjonalny radaru impulsowego



Cechy impulsów sondujących

spektralna gęstość mocy $PSD = \dfrac{P}{B_{10\text{dB}}}$



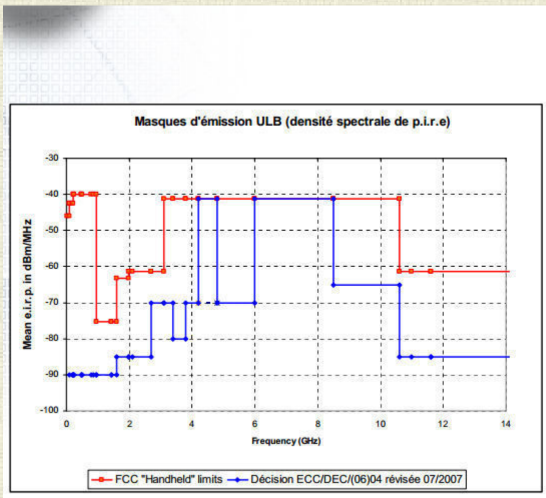

Impulsy ultraszerokopasmowe (UWB ultra - wideband)

$$B > 500\,\text{MHz}$$

lub

$$B > 20(25)\%\ f_0$$

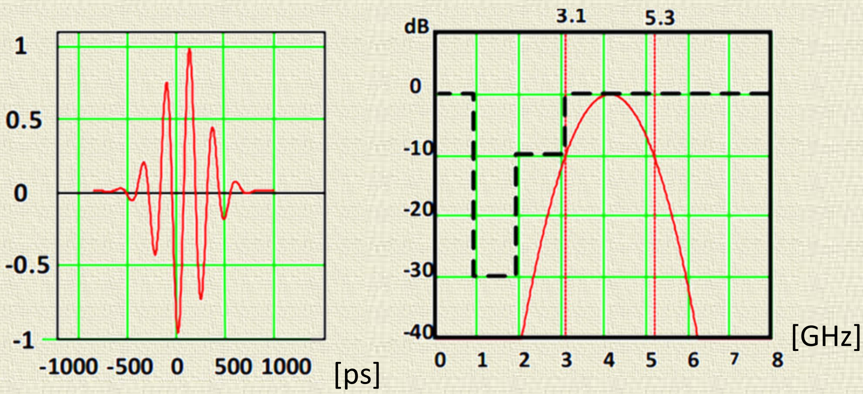
Dopuszczalne (FCC/ i ECC) poziomy emisji dla systemów UWB




| Frequency band | Power spectral density (e.i.r.p.) |
|---|---|
| < 1.6 GHz | –90 dBm/MHz |
| 1.6 - 2.7 GHz | -85 dBm/MHz |
| 2.7 - 3.4 GHz | -70 dBm/MHz |
| 3.4 - 3.8 GHz | -80 dBm/MHz |
| 3.8 - 4.2 GHz | –70 dBm/MHz |
| 4.2 - 4.8 GHz | *–70 dBm/MHz* *(–41.3 dBm/MHz)* |
| 4.8 - 6 GHz | –70 dBm/MHz |
| 6 - 8.5 GHz | –41,3 dBm/MHz |
| 8.5 - 10.6 GHz | –65 dBm/MHz |
| > 10.6 GHz | –85 dBm/MHz |

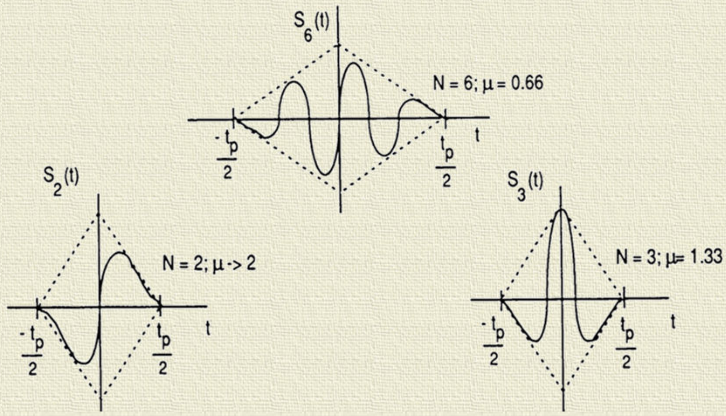
EIRP - equivalent isotropically-radiated power

Impuls i jego widmo




$$B \sim \frac{1}{t_p}$$

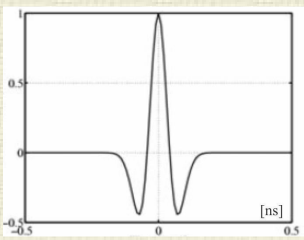
Impulsy UWB – zasadnicze właściwości

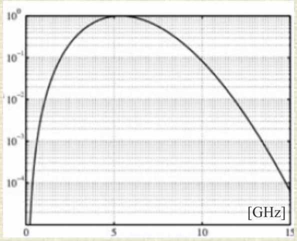



$$\mu = \frac{\Delta f}{f_0} \qquad B = \frac{4 f_0}{N} = \frac{4}{N T_0} = \frac{2}{t_p}$$

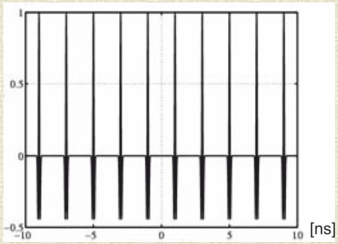
Impuls Gaussa z zerową średnią $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{\sqrt{2\sigma^2}}}$

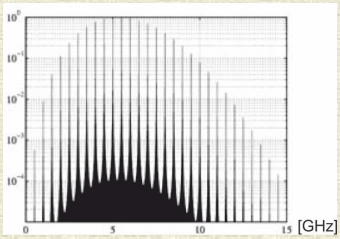
jeden impuls



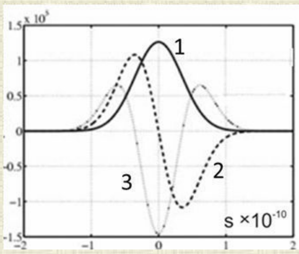



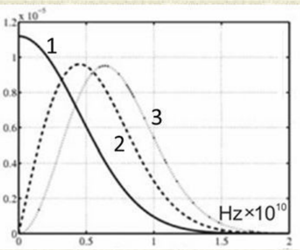

kolejka impulsów




Pochodne impulsu Gaussa



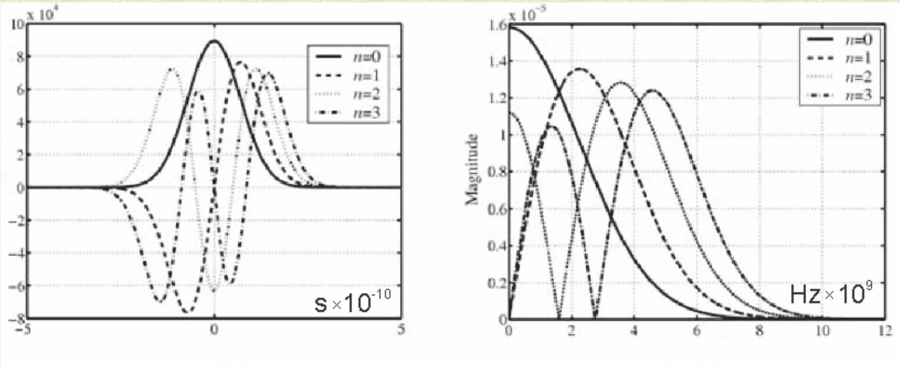

1 oryginał $\Phi_1(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} = K_1 e^{-\left(\frac{x}{\tau}\right)^2}$

2 pierwsza pochodna (monocykl Gaussa) $\Phi_2(t) = K_2 \frac{-2t}{\tau^2} e^{-\left(\frac{x}{\tau}\right)^2}$

3 druga pochodna (falka Rickera albo dublet Gaussa) $\Phi_3(t) = K_3 \frac{-2}{\tau^2}\left(1 - \frac{-2t^2}{\tau^2}\right) e^{-\left(\frac{x}{\tau}\right)^2}$

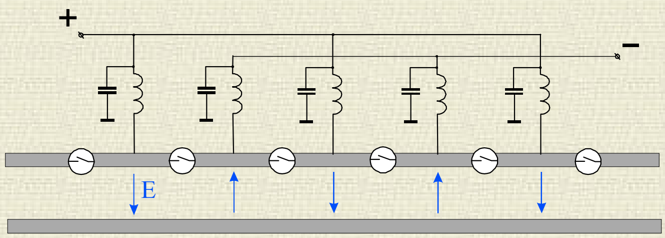
Impulsy Hermita

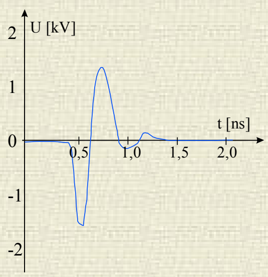
$$h_n(t) = -\tau^n e^{\frac{t^2}{2\tau^2}} \frac{d^n}{dt^n} e^{-\frac{t^2}{2\tau^2}}$$




Generatory ultrakrótkich impulsów

Generator z falą zamrożoną



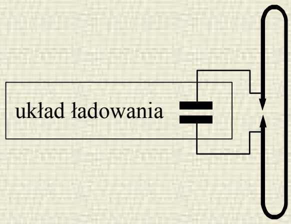



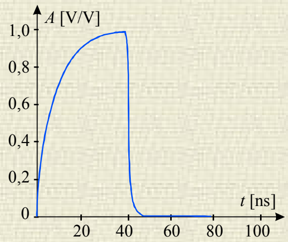

$$u(l,t) = \frac{1}{2}u(l,0)(l - vt) + \frac{1}{2}u(l,0)(l + vt)$$

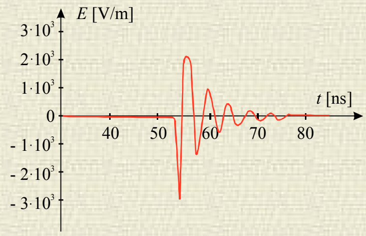
$$f_0 = \frac{v}{2l}$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

Generator z iskrownikiem



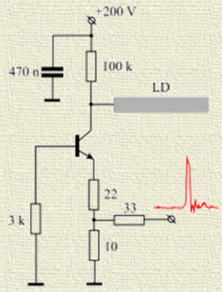



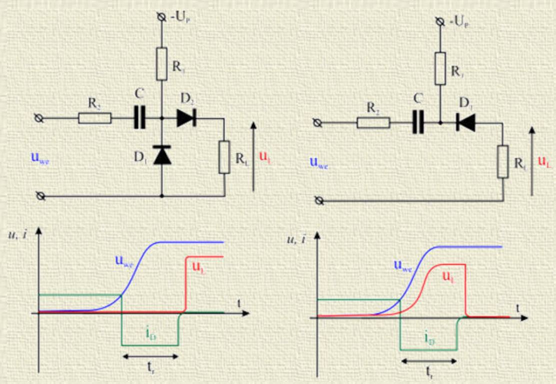




Generatory półprzewodnikowe

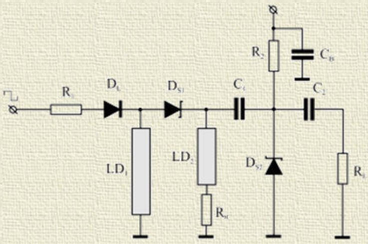
Z diodami ładunkowymi
(formowanie ultraszybkich zboczy)

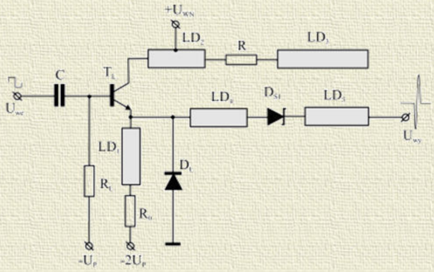
Z tranzystorem lawinowym



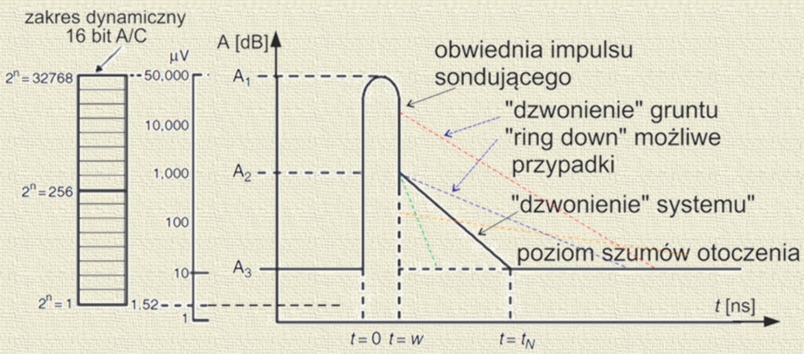



Konstrukcje kombinowane

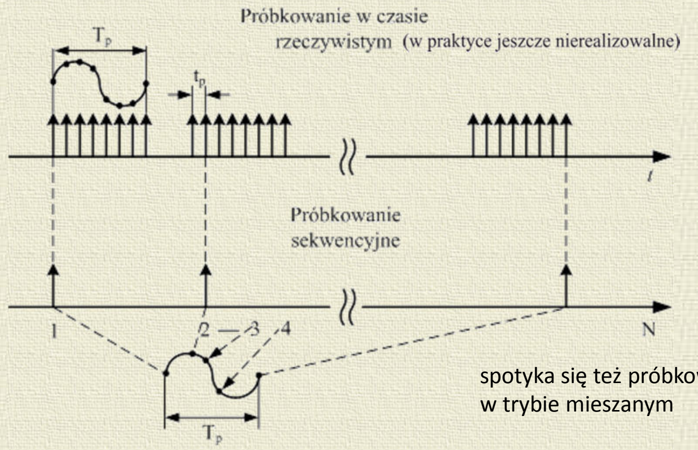




Zakres dynamiczny GPR a rozdzielczość przetwornika AC



Odbiorniki impulsowe




spotyka się też próbkowanie
w trybie mieszanym

Z tw. Shanonna

$$t_p \le \frac{1}{2B}$$

W praktyce

$$t_p \le \frac{1}{5B}$$

Parametry typowe

| | |
|---|---|
| Typowy czas trwania impulsu | $\tau = 1\,\mathrm{ns}$ |
| Typowy okres powtarzania | $T_p = 1\,\mu\mathrm{s}$ |
| Osiągane pasmo sygnału | $B = 1\,\mathrm{GHz}$ |
| Częstotliwość próbkowania | $f_p = 5\,\mathrm{GHz}$ |
| Szerokość imp. próbkujących i odstęp między nimi | $\tau_p = 200\,\mathrm{ps}$ |
| Liczba próbek w okresie | $N = 5000$ |
| Długość okna czasowego | $T = 1,3 \cdot \frac{2h}{v}$ |
| Czas akwizycji poj. trasy przy metodzie stroboskopowej | $t_a = N \cdot T_p = 5\,\mathrm{ms}$ |

Moc szumów na we. odbiornika

$$P_{sz.wej.} = k \cdot T_0 \cdot B = 1,38 \cdot 10^{-23}\,[\mathrm{J/K}] \cdot 290[\mathrm{K}] \cdot 10^9\,[\mathrm{Hz}] = 40,02 \times 10^{-13}\,[\mathrm{W}] = \text{-}84\ \mathrm{dBm}$$

Co odpowiada wartości napięcia $U_{sz.wej} = 2\,\mu\mathrm{V}$

## KALKULACJA ZASIĘGU IMPULSOWEGO GPR

Przyjęte założenia:

sygnał sondujący (video impuls) o czasie trwania $\tau$=1 ns ,

częstotliwości powtarzania $f_p$= 1MHz,

moc średnia nadajnika $P_T$=10 dBm, $P_T$=15 dBm, $P_T$=20 dBm,

współczynnik wypełnienia $k$ =0,001,

zyski kierunkowe anten nadawczej i odbiorczej $G_T = G_r$ = 10,

straty stałe aparaturowe $L_{ap}$= 7,5 dB,

obiekt w postaci płytki metalowej (kwadrat o boku 10 cm),

gleba o stałej dielektrycznej $\varepsilon_r$ = 5,

współczynniki tłumienia w glebie $\alpha$ = 0,5, 5, 10, 15, 20 dB/m.

Straty w antenie - przyjmuje się zwykle 2 dB strat na nadawanie i odbiór $L_e$= 4 dB

Straty na niedopasowanie szacuje się zwykle na $L_m$= 1dB.

Straty transmisji związane z propagacją (powietrze - ośrodek geologiczny i ośrodek geologiczny - powietrze) (tzw. transmission coupling loss) określane są wyrażeniami:

$$L_{t1,2} = 20\log\left(\frac{4Z_m Z_a}{\left|Z_m + Z_a\right|^2}\right)$$

$Z_a$ - impedancja charakterystyczna powietrza wynosząca ok. 377 Ω

$Z_m$ - impedancja charakterystyczna ośrodka

$$Z_m = \left(\sqrt{\frac{\mu_0\mu_r}{\varepsilon_0\varepsilon_r}}\right)\frac{1}{\left(1+\tan^2\delta\right)^{\frac{1}{4}}}\left(\cos\frac{\delta}{2} + j\sin\frac{\delta}{2}\right)$$

Dla wielu ośrodków geologicznych przyjmuje się $Z_m$=125 Ω

wobec czego $L_{t1} = L_{t2}$ =2,5 dB

$L_s$ - straty związane z procesem rozprzestrzeniania się (spreading loss)

$$L_s = 10\log\frac{P_r}{P_t} = 10\log\frac{G_t A_r \sigma}{\left(4\pi R^2\right)^2}$$

$L_{sc}$ - straty związane z procesem odbicia

$$L_{sc} = 20\log\left(1 - \left|\frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}\right|\right) + 20\log\sigma$$

$Z_1$- impedancja charakterystyczna ośrodka pierwszego,
$Z_2$ - impedancja charakterystyczna ośrodka drugiego,
$\sigma$ - powierzchnia skuteczna obiektu.

Wartość powierzchni skutecznej płytki metalowej opromieniowanej prostopadle

$$\sigma = \frac{4\pi}{\lambda^2} a^2 b^2$$

co przy $a = b = 10$ cm daje wartość $\sigma = 0{,}014$ m$^2$

Straty materiałowe związane z ośrodkiem geologicznym

$$L_a = 8{,}686 \cdot 2 \cdot R \cdot 2\pi f \sqrt{\left(\frac{\mu_0 \mu_r \varepsilon_0 \varepsilon_r}{2}\left(\sqrt{1 + tg^2\delta}\right) - 1\right)}$$

Dla przyjętych danych $V_t$ =200 V (wartość szczytowa), $V_r = U_{prog}$= 6,32 μV współczynnik skuteczności wyniesie:

$$SP = 20 \times \lg\frac{200}{6{,}32 \cdot 10^{-6}} = 150\,\text{dB}$$

Kalkulację zasięgu radaru geofizycznego wygodnie jest prowadzić w oparciu o podstawowe równanie zasięgu radaru z uwzględnieniem strat

$$P_r = \frac{P_t G_t G_r \sigma \lambda^2}{(4\pi)^3 R^4 \varepsilon_r^2 L_T}$$

Współczynnik skuteczności dla typowego systemu

$$P_{MDS} = kT_0 \cdot B_{IF} \cdot F \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_{min}$$

$B_{IF}$ - pasmo demodulatora,
$F$ - współczynnik szumów obwodów wejściowych odbiornika,

$\left(\frac{S}{N}\right)_{min}$ - progowy stosunek sygnał/szum na wejściu demodulatora.

Typowe wartości parametrów odbiornika georadaru impulsowego:

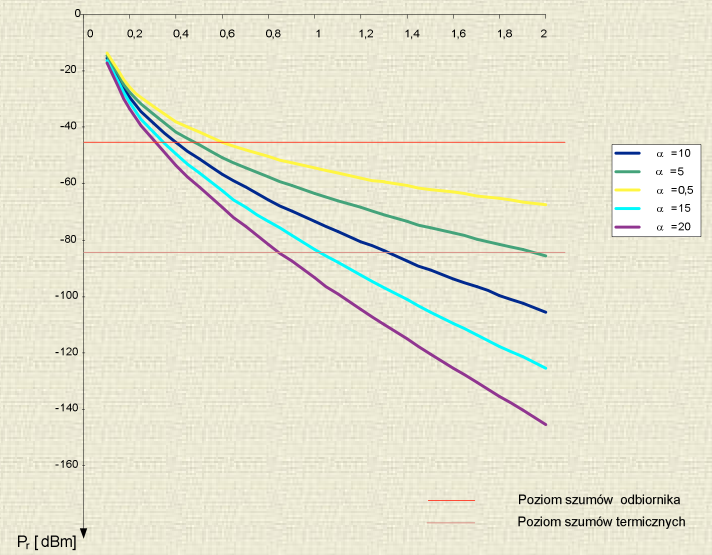
$B_{IF} = B = 1$ GHz dla impulsu sondującego o czasie trwania $t_i$=1 ns,

$F = 2$ dB, $\left(\frac{S}{N}\right)_{min} = 8$ dB

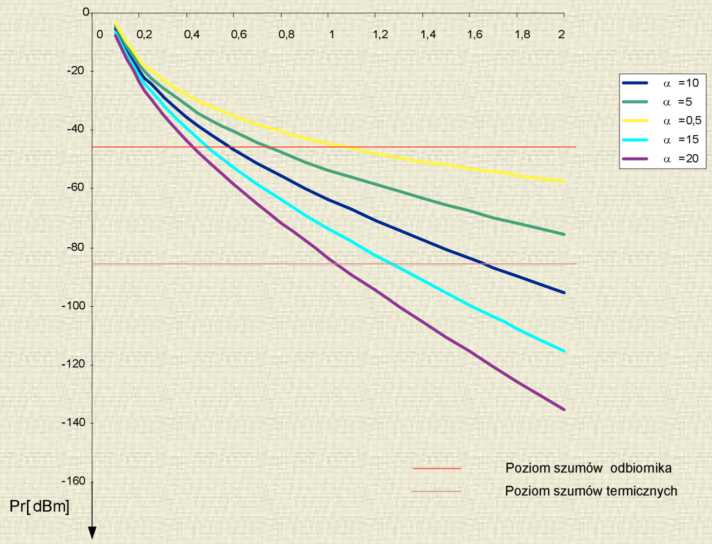
czułość $V_r \cong 6{,}32\ \mu\mathrm{V}$

$$P_{MDS} = 40{,}02 \cdot 10^{-13} \cdot 1{,}6 \cdot 6{,}3 = 40 \cdot 10^{-12}\,[\mathrm{W}] = -74\,\mathrm{dBm}$$

Moc wejściowa odbiornika w funkcji odległości dla $P_t$= 10 dBm

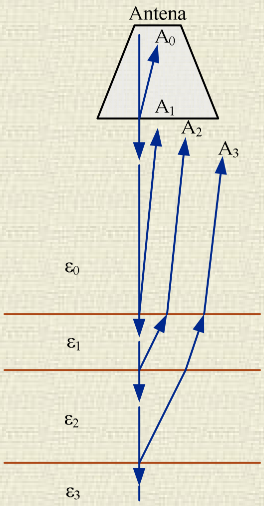


Moc wejściowa odbiornika w funkcji odległości dla $P_t$= 20 dBm



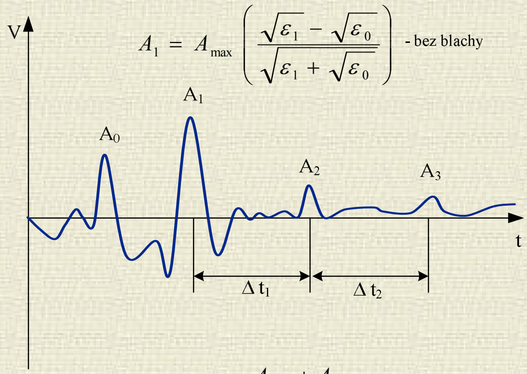

| Tłumienie [dB/m] | Zasięg $R$ [m] dla $P_t$ =10 dBm | Zasięg $R$ [m] dla $P_t$ =15 dBm | Zasięg $R$ [m] dla $P_t$ =20 dBm |
|---|---|---|---|
| 0,5 | > 2 | > 2 | > 2 |
| 5 | 1.4 | 1,65 | 1,8 |
| 10 | 1 | 1,2 | 1,3 |
| 15 | 0,8 | 0,9 | 1 |
| 20 | 0,65 | 0,75 | 0,8 |

Zasada pomiaru przenikalności elektrycznej ośrodka przy pomocy georadaru
(w taki sposób można też mierzyć wilgotność ośrodka)



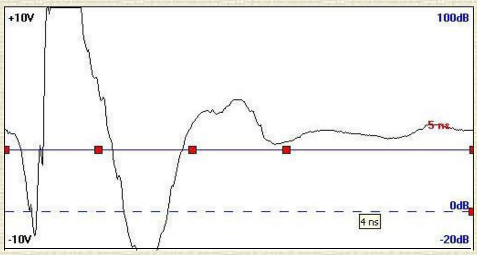

$A_1 = A_{max}$ - gdy blacha na powierzchni

$$A_1 = A_{max}\left(\frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_0}}\right)$$ - bez blachy

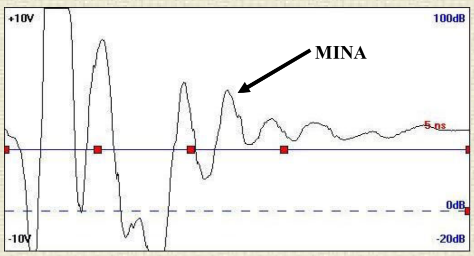



$$\sqrt{\varepsilon_1} = \frac{A_{max} + A_1}{A_{max} - A_1}$$

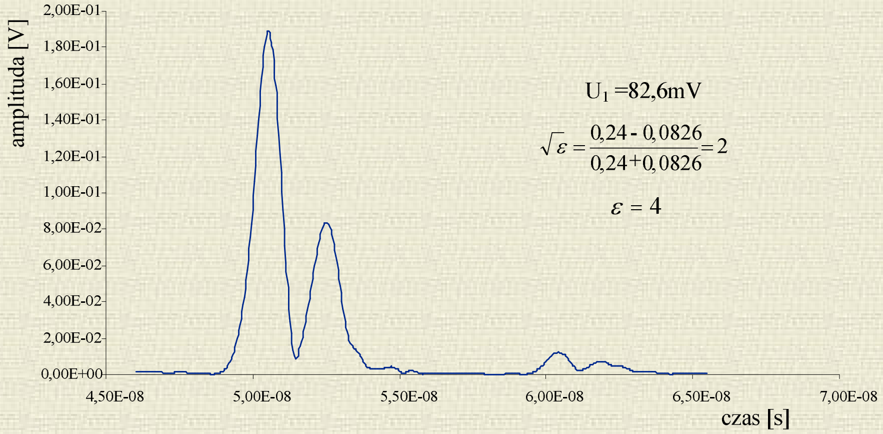
**zobazowanie bez obiektu**




**obiekt na głębokości 12 cm**



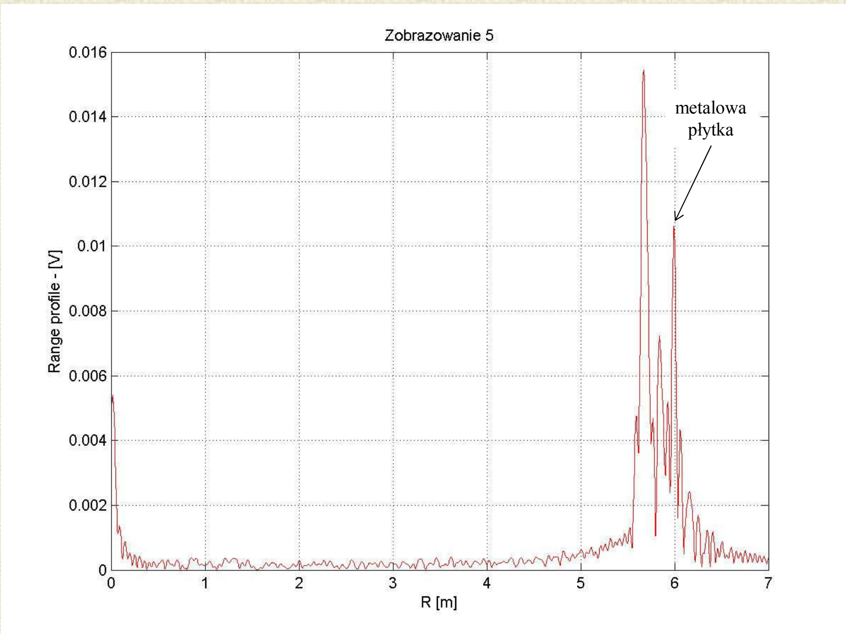
Przykład pomiaru




$U_1$ =82,6mV

$$\sqrt{\varepsilon} = \frac{0{,}24 - 0{,}0826}{0{,}24 + 0{,}0826} = 2$$

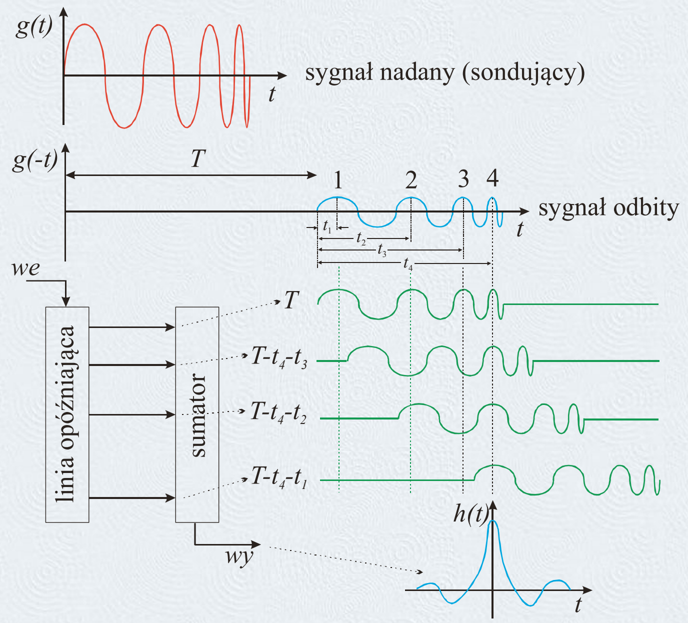
$$\varepsilon = 4$$



# GEORADARY Z FALĄ CIĄGŁĄ

Radary z liniową modulacją częstotliwości
FMCW

Systemy korelacyjne




minimalny czas rozróżnialny (relacja nieostrości) $\Delta t \geq \dfrac{1}{\Delta f}$

maksymalna liczba rozróżnialnych odcinków czasowych $N = \dfrac{T_S}{\Delta t} = T_S \Delta f$

wartość średnia szumów na wyjściu $N\sigma_n^2 = N\,\underbrace{2\int_0^\infty S_n(f)df}$

gęstość widmowa szumu

wartość skuteczna (odchylenie standardowe) szumu na wyjściu

wartość kwadratu sygnału szczytowego (po kompresji) $(Ns)^2$

Stosunek mocy sygnału do szumu na wyjściu wyniesie więc

$$SNR_{WY} = \frac{(Ns)^2}{N\sigma_n^2} = \frac{Ns^2}{\sigma_n^2}$$

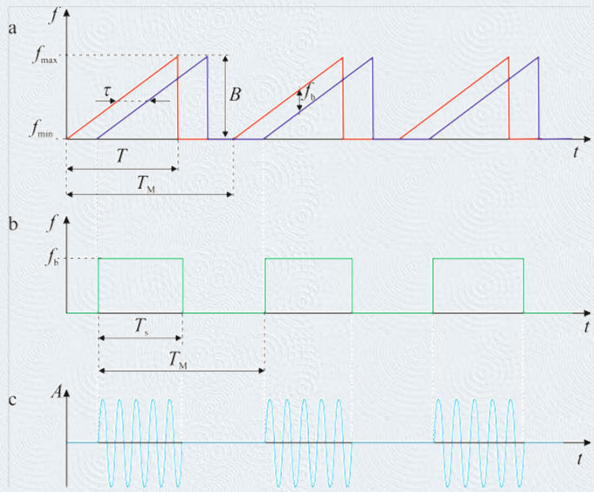
zaś na wejściu wynosił tylko $SNR_{WE} = \dfrac{s^2}{\sigma_n^2}$

*SNR* polepszył się zatem *N* razy czyli $N = \dfrac{T_S}{\Delta t} = T_S \Delta f$

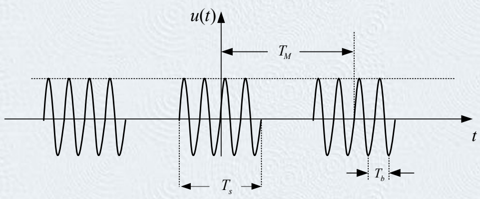
Homodynowe systemy z FMCW

$$\tau = \frac{2R}{v}$$

$$f_b = \frac{B \cdot \tau}{T}$$




Sygnał dudnień




postać czasowa

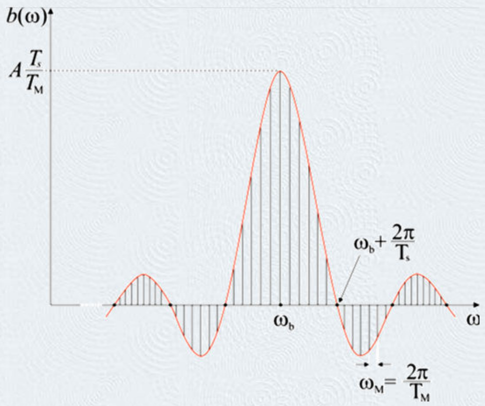
$$u(t) = \begin{cases} A \sin \omega_b t \ \ \text{dla} \ \ mT_{\mathrm{M}} - \frac{T_s}{2} \le t \le mT_{\mathrm{M}} + \frac{T_s}{2} & ; \ \ m = 1, 2, 3... \\ 0 \ \ \text{dla pozostaych} \ \ t. & \end{cases}$$

Amplitudy harmonicznych
Dla postaci częstotliwościowej

$$|b_n| = \frac{A}{2} \cdot \frac{T_s}{T_M} \left| \frac{\sin(n\omega_M - \omega_b)\frac{T_s}{2}}{(n\omega_M - \omega_b)\frac{T_s}{2}} - \frac{\sin(n\omega_M + \omega_b)\frac{T_s}{2}}{(n\omega_M + \omega_b)\frac{T_s}{2}} \right|,$$

Obwiednia

$$b(\omega)=\frac{A}{2}\cdot\frac{T_s}{T_M}\left|\frac{\sin(\omega-\omega_b)\frac{T_s}{2}}{(\omega-\omega_b)\frac{T_s}{2}}-\frac{\sin(\omega+\omega_b)\frac{T_s}{2}}{(\omega+\omega_b)\frac{T_s}{2}}\right|.$$




Dwa obiekty będą rozróżnialne jeśli

$$\Delta\tau=\frac{T\cdot\Delta f_b}{B}=\frac{1}{B}$$

Odległość do obiektów

$$R=\frac{c\cdot\tau}{2\sqrt{\varepsilon}}$$

$$\Delta R=\frac{c}{2B\sqrt{\varepsilon}}$$

Zakres jednoznacznie mierzonych odległości przy $f_b=B$

$$R_{jp}=\frac{c\cdot T}{\sqrt{\varepsilon}}$$

Schemat homodynowego systemu FMCW


Przy zastosowaniu DFT, równanie pozwalające zamienić kolejne dyskretne częstotliwości *n* w otrzymanym widmie na odległości do obiektów można wyrazić następująco:

$$R(n) = \frac{n}{M} N \Delta r_{odl}$$

$N$ - liczba próbek sygnału sondującego odpowiadającą czasowi przestrajania $T$
$M$ - liczba punktów DFT
$n$ - kolejne numery próbek DFT

$$n \in \langle 1,\ M-1 \rangle$$

$\Delta r_{odl}$ rozróżnialność odległościowa metody

Dla $N$ – punktowej DFT w celu przeskalowania osi próbek w (dziedzinie częstotliwości) na odległości do obiektu, wystarczy przemnożyć kolejne wartości $n$ przez rozróżnialność odległościową $\Delta r_{odl}$

Odległości określić można także poprzez analizę fazy sygnału echa

$$\varphi_i = 2\pi f_i \frac{2R}{c} = 2\pi \frac{2R}{\lambda_i}$$

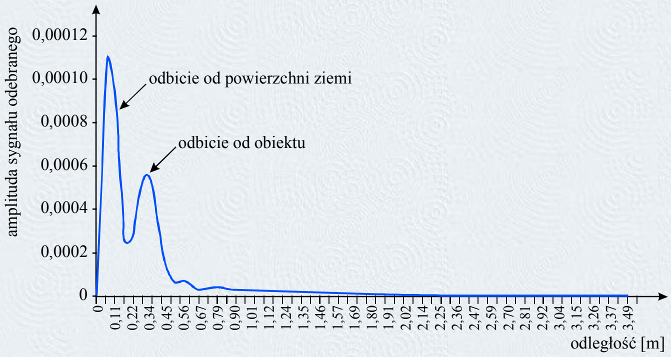
Dla pojedynczego obiektu znajdującego się na odległości $R$ zależność fazy od wszystkich częstotliwości jest liniowa.

W przypadku obiektu pojedynczego na wyjściu detektora otryma sie drganie harmoniczne o częstotliwości zależnej od przesunięcia fazy i adekwatnej do odległości $R$.

Przy wielu obiektach sygnał będzie pewną mieszaniną drgań harmonicznych o częstotliwościach zależnych od przesunięć fazy, a więc odległości do obiektów.

Poprzez zastosowanie odwrotnej transformacji Fouriera złożony sygnał z dziedziny częstotliwości może być przeniesiony w dziedzinę czasu.
Jest to tzw. syntetyczne profilowanie odległości.

Przykładowy syntetyczny profil odległości



W najnowszych systemach detekcję fazy realizuje się metodą kwadraturową

Metoda ta posiada szereg istotnych zalet

Częstotliwość końcowa detektora (ang. baseband) jest położona w okolicy 0 Hz nie trzeba więc stosować kłopotliwych filtrów p.cz., co umożliwia całkowite scalanie detektora lub jego realizację w FPGA

Metoda jest stosunkowo prosta w realizacji

Szerokość pasma można w prosty sposób dostosować do potrzeb, nawet w czasie przetwarzania

Rozróżnianie częstotliwości lustrzanych – eliminacja konieczności stosowania przestrajanych filtrów.

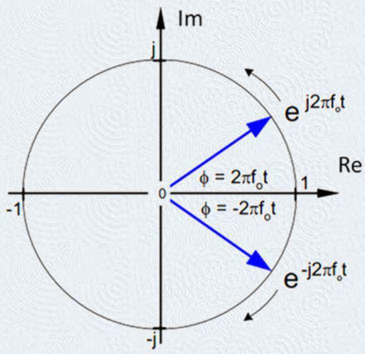
Brak filtrów i możliwość scalania obniża koszty metody

Częstotliwość heterodyny wyznacza częstotliwość środka pasma sygnału

Idea QAM bazuje na słynnej tożsamości Eulera $e^{j\pi} = -1$

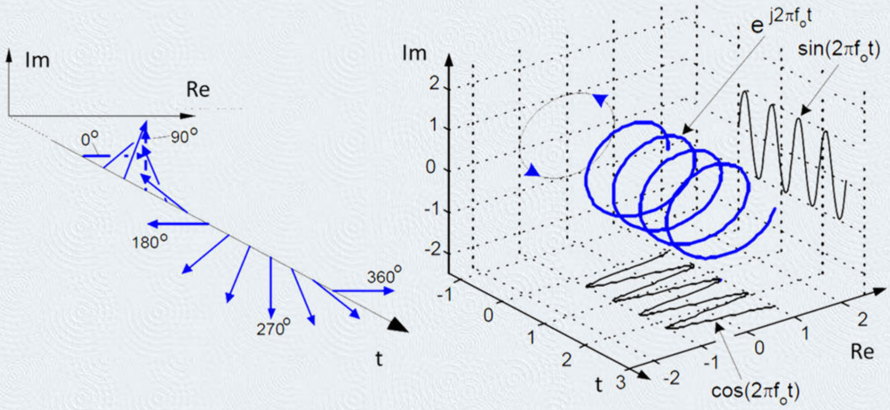
$$\cos(x) = \frac{e^{jx}}{2} + \frac{e^{-jx}}{2}$$

Jeśli: $x = 2\pi f_0 t$

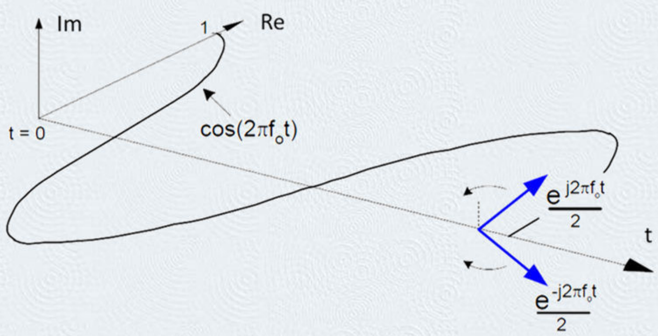



$e^{2\pi f_0 t}$ fazor

Wirujące fazory tworzą w czasie spiralną trajektorię



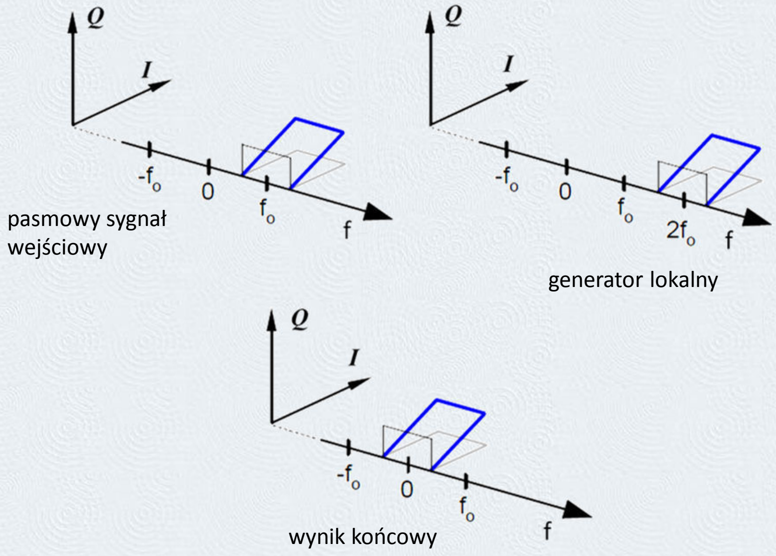

Suma fazorów jest rzeczywista i odwzorowuje funkcję cos



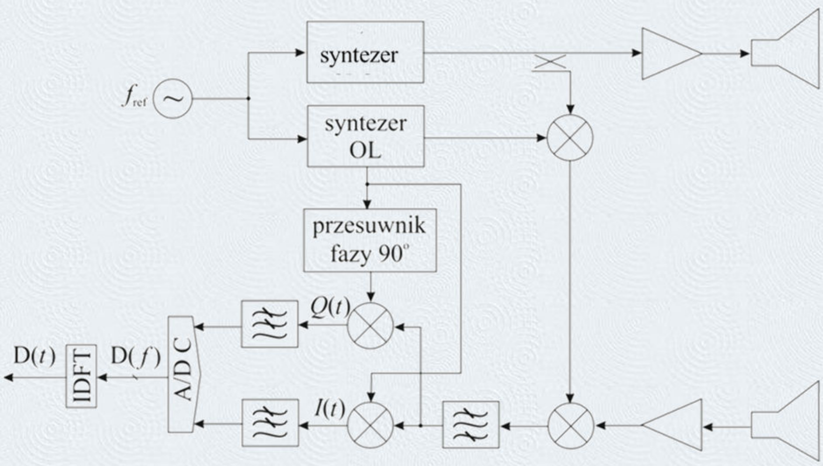

Re – składowa synfazowa ozn. $I$

Im – składowa kwadraturowa ozn. $Q$

Demodulacja QAM sygnałów pasmowych

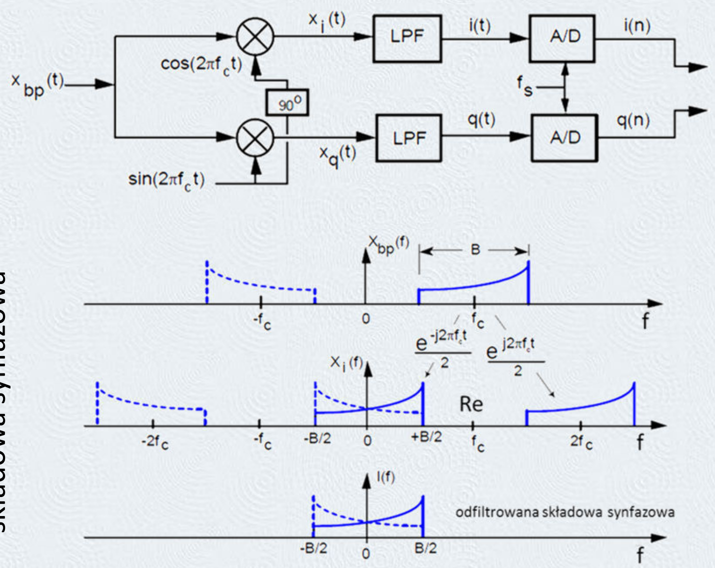



System kwadraturowy

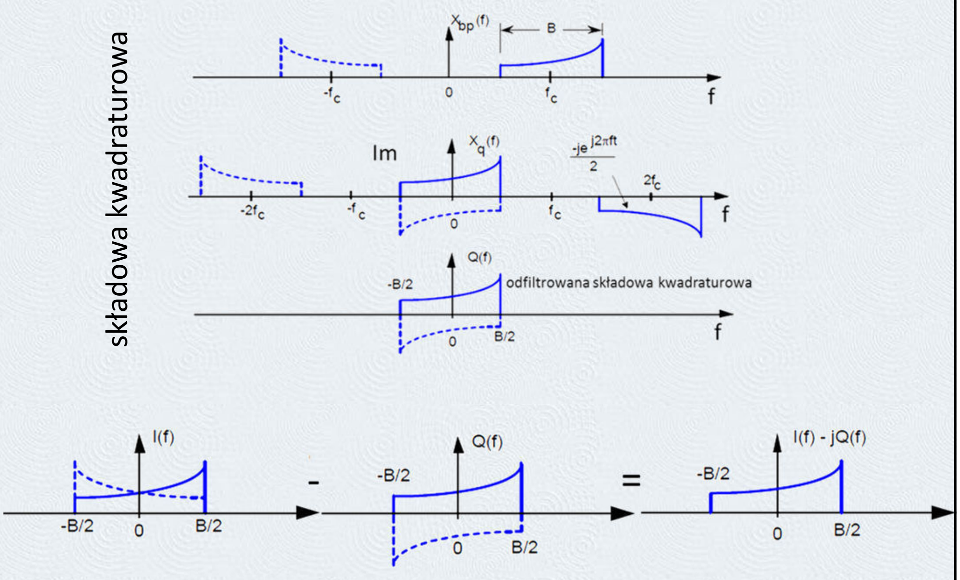


# Próbkowanie

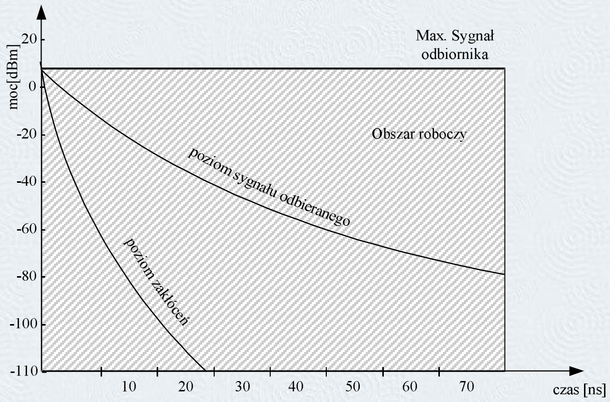
składowa synfazowa




składowa kwadraturowa



Obszar roboczy odbiornika GPR




Parametry typowego radaru FMCW

| | |
|---|---|
| **Nadajnik** | |
| **Moc szczytowa** | 500 mW (26,9 dBm) |
| **Straty w aparaturze (linie kablowe, antena)** | 9 dB |
| **Średnia moc promieniowania** | 61 mW (17,9 dBm) |
| **Czas powtarzania** | 1 ms |
| **Poziom zakłóceń w funkcji czasu (profil zakłóceń wnoszony przez antenę, produkty intermodulacji, szumy fazowe generatora)** | 10 dB/ns |
| **Odbiornik** | |
| **Szerokość pasma RF** | 1 GHz |
| **Szerokość pasma IF** | 13,3 kHz (w wolnej przestrzeni) |
| **Moc szumu termicznego (300 K)** | $5{,}52 \cdot 10^{-17}$ W (-132 dBm) |
| **Współczynnik szumów mieszacza** | 8 dB |
| **Minimalny poziom sygnału** | -124 dBm |
| **Maksymalny poziom sygnału** | 10 dBm |
| **Zakres dynamiczny** | 134 dB |

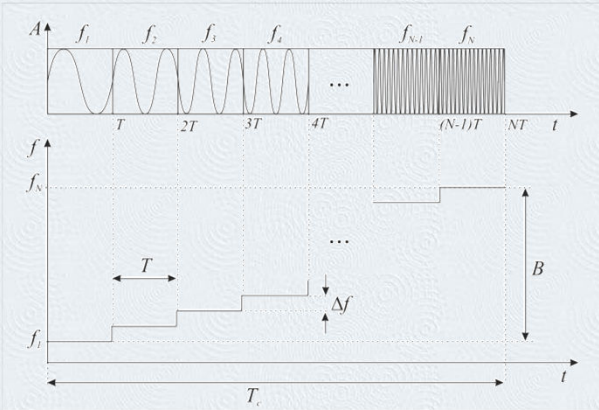
Radary ze schodkową modulacją częstotliwości
SFCW

**Zasadnicze zalety**

+ prostota generacji przebiegów z SFCW
+ łatwość uzyskania bardzo szerokiego pasma
+ możliwość stosowania przestrajanych odbiorników wąskopasmowych
+ możliwość ważenia schodków (zmiana skoku, amplitudy, fazy, szerokości, kolejności)
+ osiągana wartość SDR jest porównywalna z systemami impulsowymi
+ możliwość realizacji w technologii FPGA

**Wady**

- złożone przetwarzanie sygnałów
- wydłużony czas skanowania



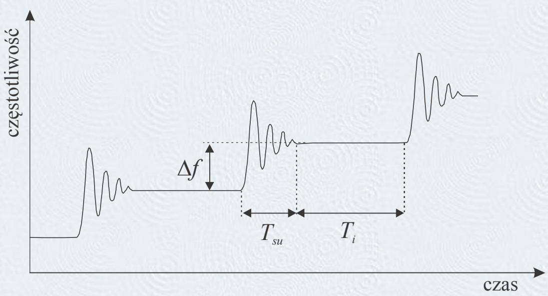

$$s(t)=\sum_{i=1}^{N} b(t)e^{j2\pi(f_1+i\Delta f)t}$$

$b(t)=1$ dla $iT \le t \le (i+1)T$

$b(t)=0$ dla pozostałych czasów

z reguły dobiera się $\Delta f \cdot T = 1$

W systemach rzeczywistych czas ustalania się częstotliwości jest niezerowy

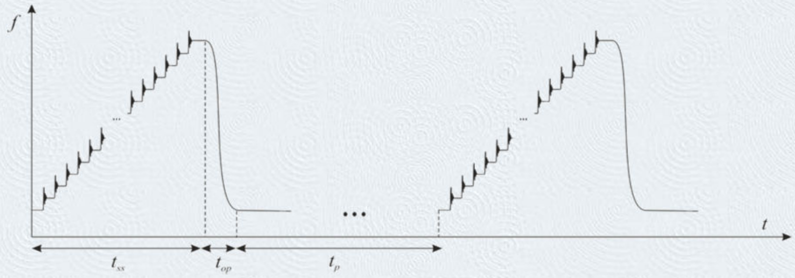



Faktyczny czas trwania impulsu (dwell time) $DT = T_{su} + T_i$

Faktyczny czas trwania sekwencji impulsów (scan time) $ST = DT\, n_f$

Współczynnik korekcji $\dfrac{ST}{DT} = \dfrac{cakowite\ pasmo\ systemu}{pomiarowe\ pasmo\ systemu} = \dfrac{B}{mB}$

sekwencja schodków




$$t_{op} << t_{ss} << t_p$$

rozróżnialność odległościowa

$$\Delta R = \frac{c}{2B\sqrt{\varepsilon}} = \frac{v}{2B} = \frac{v}{2N \cdot \Delta f}$$

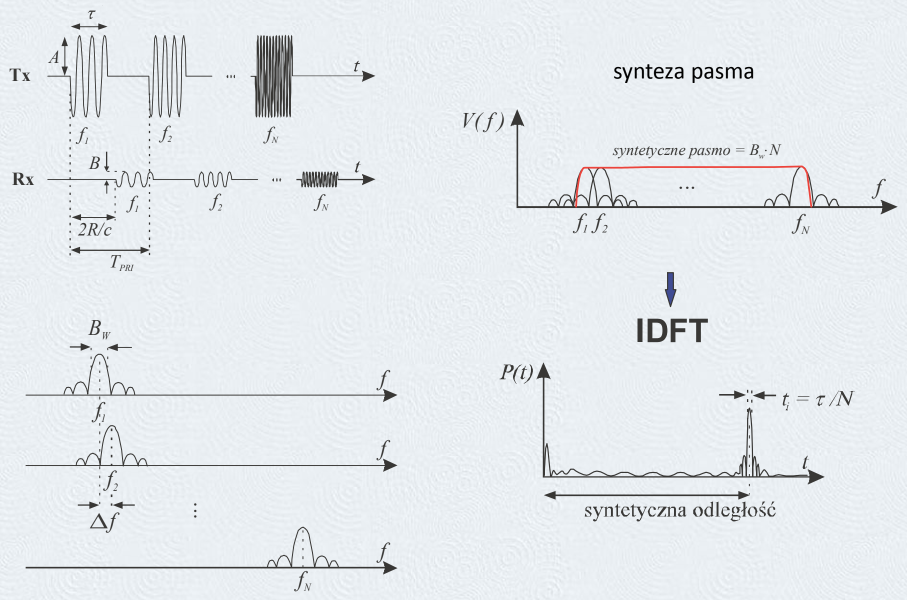
zakres jednoznacznie mierzonej odległości

$$R_{j.p} = \frac{c \cdot T}{2}$$

$$SNR = \frac{2E_T G^2 \lambda^2 \sigma}{N_0 \left(4\pi\right)^3 R^4}$$

- $E_R$ - energia sygnału echa,
- $N_0 = 2kT_0F$ - gęstość widmowa mocy szumów,
- $G$ - zysk anteny nadawczo-odbiorczej, radar monostatyczny,
- $F$ - współczynnik szumów odbiornika,
- $k$ - stała Boltzmana,
- $T_0$ - temperatura w skali Kelvina,
- $\lambda$ - długość fali na jakiej pracuje radar,
- $\sigma$ - powierzchnia skuteczna obiektu,
- $R$ - zasięg radaru.

SFCW – synteza impulsu




Sygnał emitowany

$$Tx_n(t) = \begin{cases} A_T \exp\left[ j\left(2\pi\left(f_1 + (n-1)\Delta f\right)t + \Phi_n\right)\right] & \text{for } (n-1)T_{PRI} \le t \le T_{PRI} + \tau \\ 0 & \text{pozost.} \end{cases}$$

Sygnał odbierany

$$Rx_n(t) = \begin{cases} A_R \exp\left[ j\left(2\pi\left(f_1 + (n-1)\Delta f\right)\left(t - \frac{2R}{c}\right) + \Phi_n\right)\right] & \text{for } (n-1)T_{PRI} + \frac{2R}{c} \le t \le T_{PRI} + \frac{2R}{c} + \tau \\ 0 & \text{pozost.} \end{cases}$$

Sygnał odniesienia

$$S_{REF\,n}(t) = \begin{cases} A_T A_R \exp\left[ j\left(2\pi\left(f_1 + (n-1)\Delta f\right)t + \Phi_n\right)\right] & \text{for } (n-1)T_{PRI} \le t \le nT_{PRI} \\ 0 & \text{pozost.} \end{cases}$$

Sygnał wizyjny $V_n(t) = Rx_n(t) \cdot S^*_{REFn}(t)$

$$V_n(t) = \begin{cases} A_T A_R \exp\left[ -j\left(2\pi\left(f_1 + (n-1)\Delta f\right)\frac{2R}{c}\right)\right] & \text{for } (n-1)T_{PRI} + \frac{2R}{c} \le t \le T_{PRI} + \frac{2R}{c} + \tau \\ 0 & \text{pozost.} \end{cases}$$

Po IDFT

$$U(k) = IDFT\left[V_n(t)\right] = A_T A_R \exp\left(-j2\pi f_1 \frac{2R}{c}\right)\exp\left[j\pi\left(\frac{k}{N} - \Delta f\frac{2R}{c}\right)(N-1)\right]\frac{\sin\left[\pi\left(k - N\Delta f\frac{2R}{c}\right)\right]}{\sin\left[\frac{\pi}{N}\left(k - N\Delta f\frac{2R}{c}\right)\right]}$$

gdzie $k = 0,1 \ldots N-1$

$$U(k) = \max \quad dla \quad k = N\Delta f\frac{2R}{c} = k_m$$

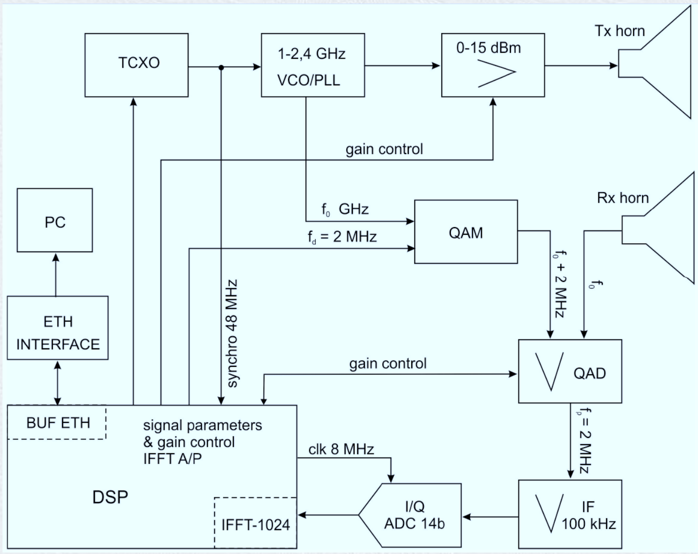
Syntetyczna odległość:

$$R = \frac{k_m c}{2N\Delta f}$$

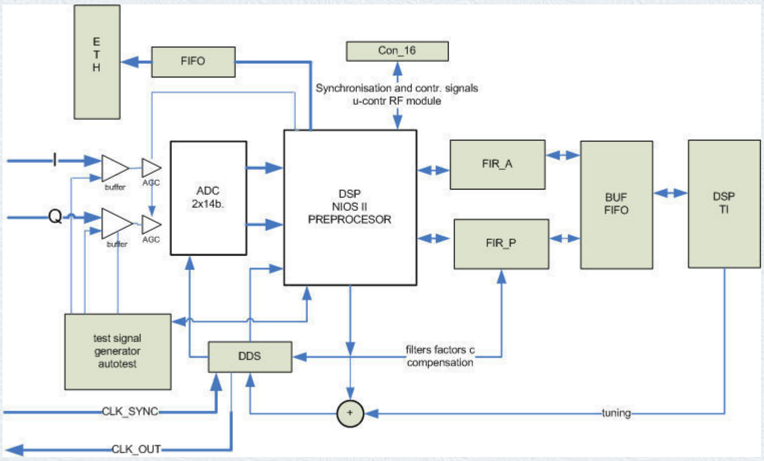
rozdzielczość

$$\Delta R = \frac{c}{2N\Delta f}$$

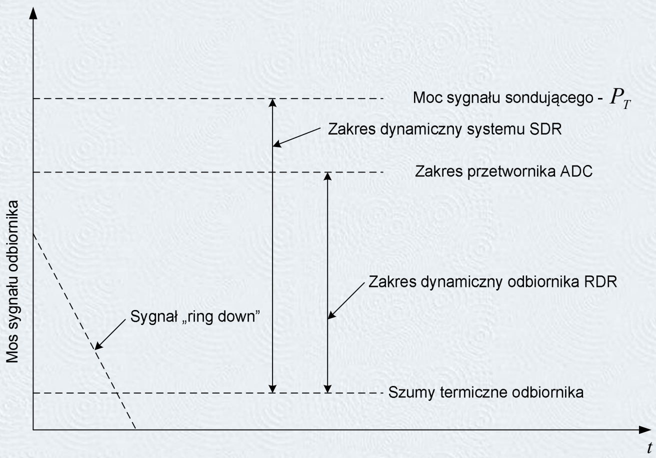
Schemat blokowy



struktura DSP




Zakres dynamiczny systemów z SFCW



Parametr ten umożliwia porównanie różnych GPR

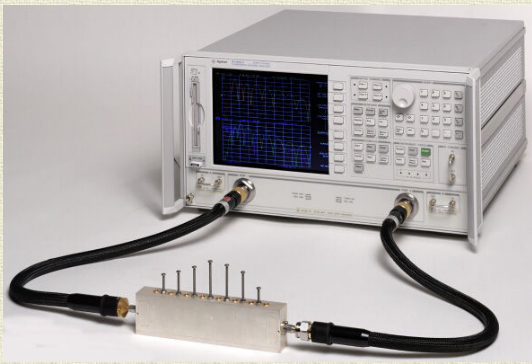
Dla parametrów:

Częstotliwość nośna 1 GHz
Pasmo 1 GHz
Czas integracji (obserwacji) 1 ms
Zysk kierunkowy anten 1 dBd
Wsp. szumów = 1
SNR = 1
T=300K
Okno pomiarowe 200 ns
Próbkowanie co 100 ps (2000 próbek)
$T_{iFMCW}$ 900 ns 1 MHz/μs

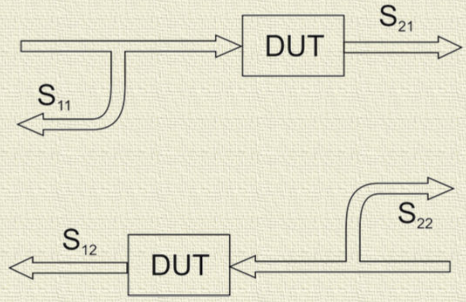
| Typ radaru (sygnału sondującego) | SDR [dB] |
|---|---|
| Impulsowy z próbkowaniem w czasie rzeczywistym | 132 |
| Impulsowy z próbkowaniem sekwencyjnym | 92 |
| SFCW | 92 |
| SFCW z korekcją | 122 |
| FMCW | 102 |
| FMCW z korekcją | 132 |

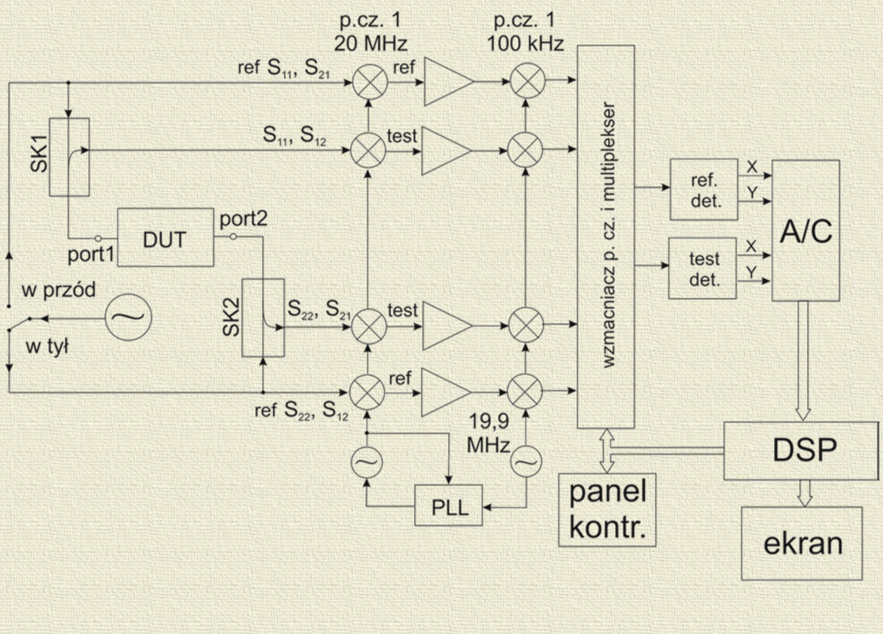
# Wektorowy analizator sieci

# (Vector Network Analyzer – VNA)



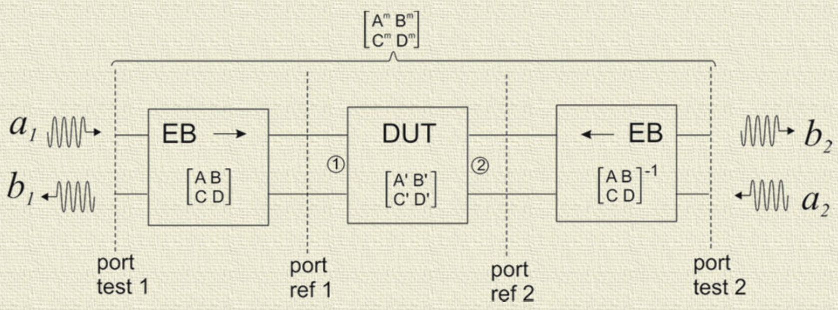
Zasada pomiaru



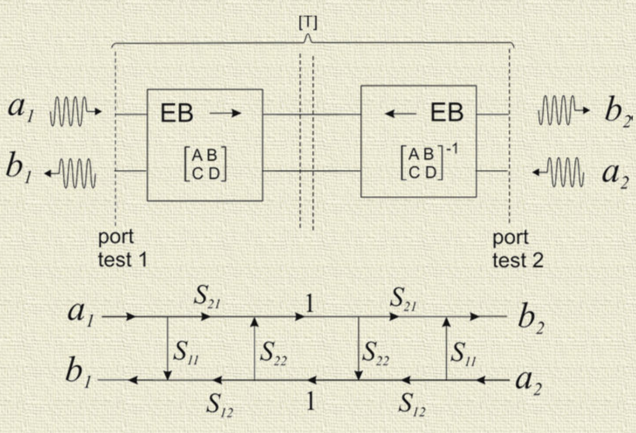



# Kalibracja VNA

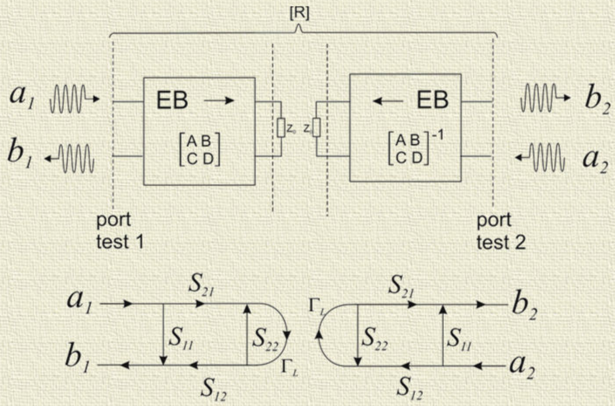
Każda linia doprowadzająca energię do VNA jest dwuwrotnikiem.
Kalibracja ma na celu kompensację wpływu linii doprowadzających na wynik pomiaru.




Zwarcie



Dopasowanie

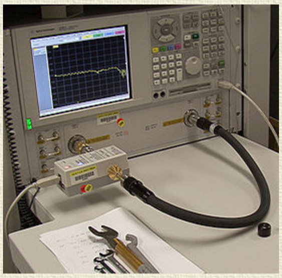



$$\begin{bmatrix} A^m & B^m \\ C^m & D^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A^m & B^m \\ C^m & D^m \end{bmatrix} = [I] \cdot \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1}$$

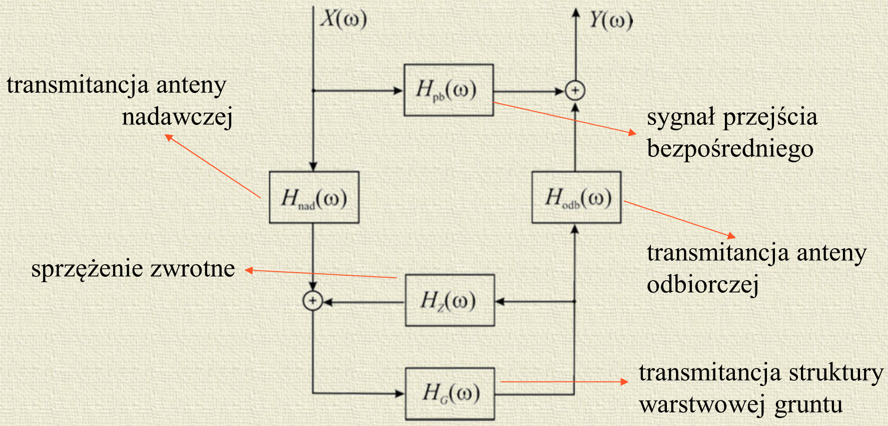
$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A^m & B^m \\ C^m & D^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = [I] \cdot \begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} A^m & B^m \\ C^m & D^m \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$$



VNA = GPR z SFCW

Układ pomiarowy z wykorzystaniem VNA




Dla tak zdefiniowanego systemu współczynnik odbicia ma postać:

$$R(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H_{nad}(\omega) H_G(\omega) H_{odb}(\omega)}{1 - H_z(\omega) H_G(\omega)}$$

Transmitancja gleby może być modelowana przy zastosowaniu funkcji Greena:

$$H_G(\omega) \Rightarrow G^{\uparrow}(\omega) = \left( \frac{\Gamma_n R_n^{TM}}{\eta_n} - \frac{\xi_n R_n^{TE}}{\Gamma_n} \right) e^{-2\Gamma_n h_n}$$

gdzie $n$ oznacza numer warstwy, $R_n^{TM}$ i $R_n^{TE}$ współczynniki odbicia od $n$ – tej warstwy odpowiednio dla modów typu TM i TE, $\Gamma_n = \sqrt{k_p^2 + \xi_n \eta_n}$ , wertykalna liczba falowa $k_p$ jest parametrem transformacji Fouriera, $\xi_n = j\omega\mu_n$ , $\eta_n = \sigma_n + j\omega\varepsilon_n$

TEM = TE + TM

Globalne współczynniki odbicia wyrażają się następująco:

$$R_n^{TM} = \frac{r_n^{TM} + R_{n+1}^{TM} e^{-2\Gamma_{n+1} h_{n+1}}}{1 + r_n^{TM} R_{n+1}^{TM} e^{-2\Gamma_{n+1} h_{n+1}}} \qquad R_n^{TE} = \frac{r_n^{TE} + R_{n+1}^{TE} e^{-2\Gamma_{n+1} h_{n+1}}}{1 + r_n^{TE} R_{n+1}^{TE} e^{-2\Gamma_{n+1} h_{n+1}}}$$

gdzie lokalne współczynniki odbicia modów TM i TE wyrażają się poprzez:

$$r_n^{TM} = \frac{\eta_{n+1}\Gamma_n - \eta_n \Gamma_{n+1}}{\eta_{n+1}\Gamma_n + \eta_n \Gamma_{n+1}} \qquad r_n^{TE} = \frac{\mu_{n+1}\Gamma_n - \mu_n \Gamma_{n+1}}{\mu_{n+1}\Gamma_n + \mu_n \Gamma_{n+1}}$$

VNA mierzy $R(\omega)$

$$R(\omega) \Rightarrow S_{11}(f)$$

Podobny model można zbudować dla pomiaru transmisyjnego wtedy

$$R^T(\omega) \Rightarrow S_{12}(f)$$

Dwuwrotnik jest symetryczny $S_{11}(f) = S_{22}(f) \qquad S_{12}(f) = S_{21}(f)$

Model ma trzy niewiadome funkcje, które można wyznaczyć empirycznie poprzez wykonanie pomiarów w trzech różnych konfiguracjach

Funkcję

$$R(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H_{nad}(\omega) H_G(\omega) H_{odb}(\omega)}{1 - H_z(\omega) H_G(\omega)}$$

można zlinearyzować

$$R_k(\omega) = H_{nad}(\omega) + R_k(\omega) H_{Gk}(\omega) H_z(\omega) + H_{Gk}(\omega)\left(H_{odb}(\omega) - H_{nad}(\omega) H_z(\omega)\right)$$

w formie macierzowej:

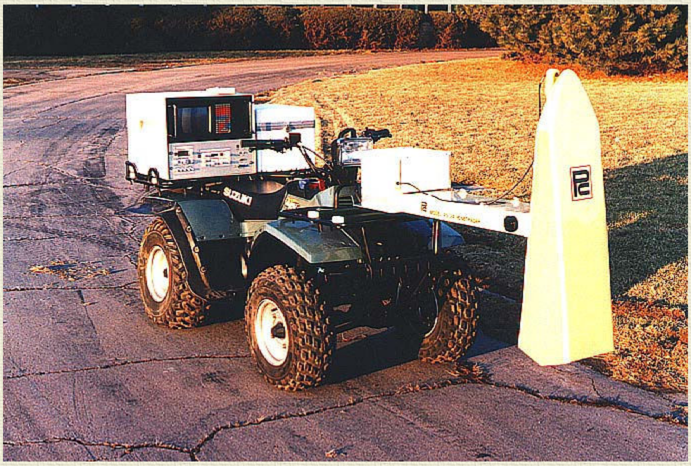
$$\begin{bmatrix} R_1(\omega) \\ R_2(\omega) \\ \vdots \\ R_k(\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & R_1(\omega) H_{G1}(\omega) & H_{G1}(\omega) \\ 1 & R_2(\omega) H_{G2}(\omega) & H_{G2}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & R_k(\omega) H_{Gk}(\omega) & H_{Gk}(\omega) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_{nad}(\omega) \\ H_z(\omega) \\ H_{odb}(\omega) - H_{nad}(\omega) H_z(\omega) \end{bmatrix}$$

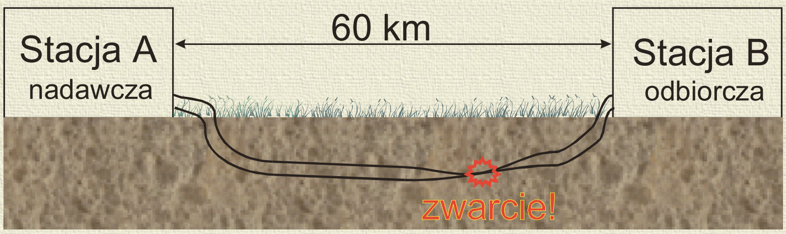
$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

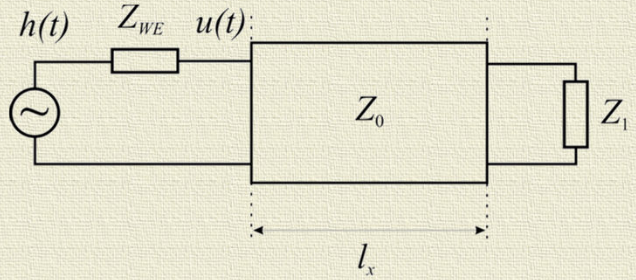
$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{A}\right)^{-1} \mathbf{A}^{*\mathbf{T}}\mathbf{R}$$

VNA jest wygodnym i elastycznym instrumentem badawczym

Wyposażony w antenę (anteny) oraz system akwizycji i przetwarzania danych może z powodzeniem zastąpić GPR

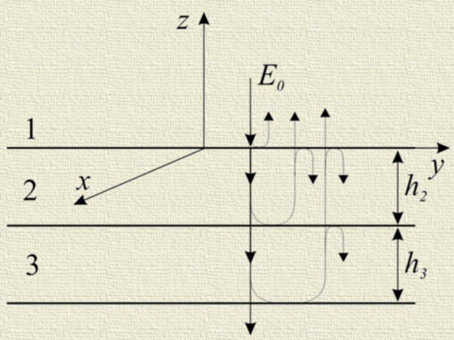





widmo odbitego impulsu można aproksymować funkcją

$$W(f) = \frac{H(f)}{2} \frac{\left(1 + R_1\right)\left(1 + R_2 e^{-2\gamma(f) l_x}\right)}{1 + R_1 R_2 e^{-2\gamma(f) l_x}}$$




Współczynnik odbicia od takiego układu można uzyskać z porównania amplitudy fali padającej z wektorową sumą amplitud fal odbitych jedno bądź wielokrotnie od granic rozdziału warstw.
Zakładając jednostkową amplitudę fali padającej uzyskuje się:

$$\Gamma = R_{1-2} + T_{1-2} T_{2-1} \sum_{n=1}^{\infty} R_{2-3}^{n} R_{2-1}^{n-1} e^{-2n\gamma_n h_n} = \frac{R_{1-2} + R_{2-3} e^{-2\gamma_2 h_2}}{1 + R_{1-2} R_{2-3} e^{-2\gamma_3 h_3}}$$

$$\Gamma = R_{1-2} + T_{1-2}T_{2-1}\sum_{n=1}^{\infty} R_{2-3}^{n} R_{2-1}^{n-1} e^{-2n\gamma_n h_n} = \frac{R_{1-2} + R_{2-3}e^{-2\gamma_2 h_2}}{1 + R_{1-2}R_{2-3}e^{-2\gamma_3 h_3}}$$

$R_{1-2} = -R_{2-1}$ oraz $R_{2-3}$ współczynniki odbicia

$T_{1-2} = 2 - T_{2-1}$ współczynniki transmisji, przy czym

$$T_{2-1} = 1 + R_{2-1} = 1 - R_{1-2}$$

$n = 1, 2, 3 \ldots$ numeruje kolejne odbicia

$h_n$ grubość $n$ –tej warstwy

$\gamma_n$ współczynnik propagacji dla $n$ –tej warstwy

dla układu $n$ - warstwowego

$$R_{n-n+1} = \frac{Z_{n+1} - Z_n}{Z_{n+1} + Z_n} \qquad T_{n-n+1} = \frac{2Z_{n+1}}{Z_n + Z_{n+1}}$$

$$Z_{we}^{n+1} = Z_{n+1}\frac{Z_{n+2} + jZ_{n+1}tgh\left(\gamma_{n+1}h_{n+1}\right)}{Z_{n+1} + jZ_{n+2}tgh\left(\gamma_{n+1}h_{n+1}\right)}$$

dla układu dwuwarstwowego powyższe zależności upraszczają się

$$R = \frac{R_{1-2} + \hat{R}\exp\left(-2\gamma_2 h_2\right)}{1 + R_{1-2} + \hat{R}\exp\left(-2\gamma_2 h_2\right)}$$

gdzie $\hat{R} = \dfrac{R_{2-3} + R_{3-4}\exp\left(-2\gamma_3 h_3\right)}{1 + R_{2-3} + R_{3-4}\exp\left(-2\gamma_3 h_3\right)}$

po rozwinięciu w szereg

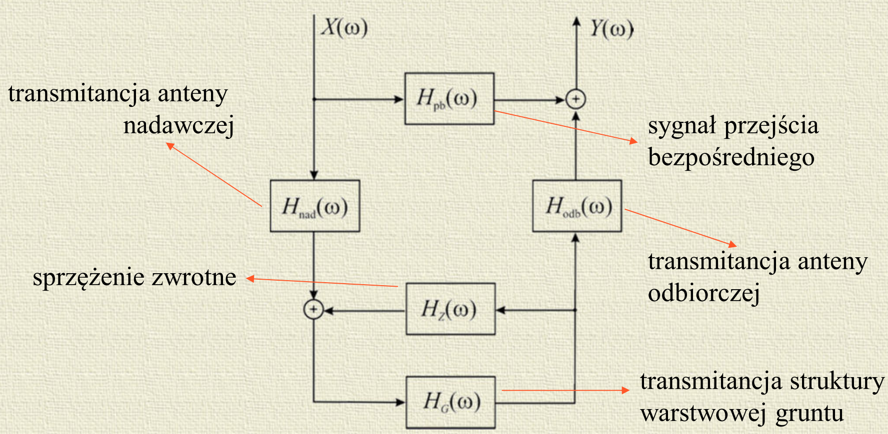
$$R = R_{1-2} + \left(1 - R_{1-2}^2\right) \sum_{n=1}^{\infty} n R_{1-2}^{n-1} e^{-2n\gamma_2 h_2} \sum_{m=1}^{\infty} \left[ \frac{1}{m!(n-m)!} \right] \times$$
$$\times \sum_{r=1}^{\infty} (-1)^r \left[ \frac{(n+r-1)!}{r!} \right] R_{3-4}^{m+r} R_{2-3}^{n-m+r} e^{-2(m+r)\gamma_3 h_3}$$

po zaniedbaniu wielokrotnych odbić

$$R \approx R_{1-2} + R_{2-3}\left(1 - R_{1-2}^2\right) e^{-2\gamma_2 h_2} + \left(1 - R_{1-2}^2\right)\left(1 - R_{2-3}^2\right) R_{3-4} e^{-2(\gamma_2 h_2 - \gamma_3 h_3)}$$

W takim przybliżeniu sygnał odbity od całej struktury składa się z sumy fal odbitych jednokrotnie od granic rozdziału warstw, przy czym sumowanie jest koherentne jeśli grubości warstw są dużo mniejsze od długości fali sondującej.
W analogiczny sposób można też opisać współczynnik transmisji dla rozpatrywanego tu układu.

znajomość tych parametrów pozwala na wyznaczenie transmitancji toru propagacji sygnału GPR




$$R(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{H_{nad}(\omega) H_G(\omega) H_{odb}(\omega)}{1 - H_z(\omega) H_G(\omega)}$$

Transmitancja gruntu może być tutaj modelowana przy zastosowaniu funkcji Greena.
Dla układu wielowarstwowego funkcja taka w dziedzinie częstotliwości może mieć postać:

$$G^{\uparrow}(\omega) = \left( \frac{\beta_n R_n^{TM}}{\eta_n} - \frac{\xi_n R_n^{TE}}{\beta_n} \right) e^{-2\beta_n h_n}$$

$n$ - numer warstwy

$R_n^{TM}$ $R_n^{TE}$ współczynniki odbicia od $n$ – tej warstwy dla modów typu TM i TE

$\beta_n = \sqrt{C^2 + \xi_n \eta_n}$ liczba falowa dla n – tej warstwy

$C^2$ parametr transformacji Fouriera

$$\xi_n = j\omega\mu_n \qquad \eta_n = \sigma_n + j\omega\varepsilon_n$$

Współczynniki odbicia wyrazić można poprzez:

$$R_n^{TE} = \frac{r_n^{TE} + R_{n+1}^{TE} e^{-2\beta_{n+1} h_{n+1}}}{1 + r_n^{TE} R_{n+1}^{TE} e^{-2\beta_{n+1} h_{n+1}}}$$

$$r_n^{TE} = \frac{\mu_{n+1}\beta_n - \mu_n \beta_{n+1}}{\mu_{n+1}\beta_n + \mu_n \beta_{n+1}}$$

$$R_n^{TM} = \frac{r_n^{TM} + R_{n+1}^{TM} e^{-2\beta_{n+1} h_{n+1}}}{1 + r_n^{TM} R_{n+1}^{TM} e^{-2\beta_{n+1} h_{n+1}}}$$

$$r_n^{TM} = \frac{\eta_{n+1}\beta_n - \eta_n \beta_{n+1}}{\eta_{n+1}\beta_n + \eta_n \beta_{n+1}}$$

Wyrażenia te wiążąc warstwę $n$ - tą z $n$ +1 - ą mają charakter rekursywny.
Za początek obliczeń można przyjąć warstwę najniższą, poniżej której zrównują się globalne i lokalne współczynniki odbicia.

Model umożliwia wykorzystanie wektorowych analizatorów sieci do badania wierzchnich warstw gruntu

**Zalety**

- możliwość kontrolowania częstotliwości środkowej i pasma sygnału *ergo*
- wyższa rozdzielczość
- lepszy stosunek S/N i szersze pasmo
- wyższa średnia wartość mocy emitowanej
- wiele wariantów konfiguracji
- możliwość doboru sygnału sondującego
- niskie koszty i ogólna dostępność metody

Wady

- problem modelowania struktury warstwowej gruntu przy podłożach silnie niejednorodnych
- problem szybkiej i jednoznacznej retransformacji do dziedziny czasu

# Przetwarzanie sygnałów i danych GPR

Przetwarzanie sygnałów i danych GPR

Przetwarzanie sygnałów

- operacje wykonywane na sygnałach (wektorach) wykonywane na A-skanach bądź grupach A-skanów

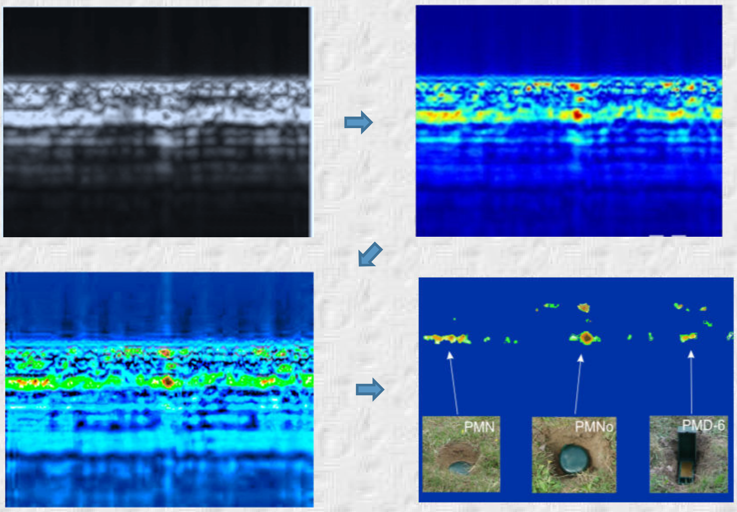
Przetwarzanie danych

- operacje wykonywane na uzyskanych zobrazowaniach (macierzach) wykonywane na B-skanach bądź grupach B - skanów oraz C – skanach i zobrazowaniach 3D (algorytmy zaawansowane)

Podstawowymi celami tych operacji są:

- poprawa stosunku sygnału użytecznego do szumu
- eliminacja zakłóceń
- poprawa rozdzielczości
- ułatwienie interpretacji zobrazowań

Przykładowe wyniki przetwarzania




Pojedynczy A-skan można przedstawić w postaci sumy:

$$x(t) = s(t) + z(t) + n(t)$$

$s(t)$ - sygnał użyteczny
$z(t)$ - zakłócenia
$n(t)$ - szum losowy

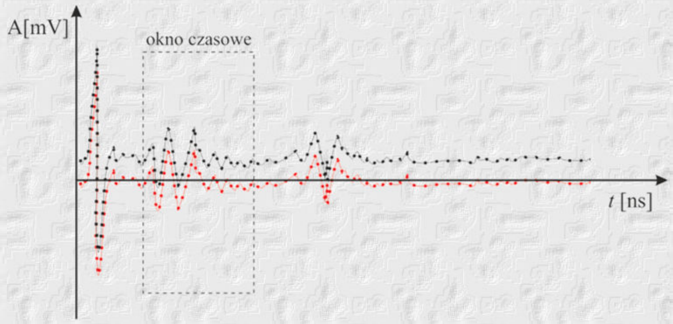
Podstawowym celem przetwarzania sygnałów jest eliminacja $z(t)$ i $n(t)$

Do najprostszych możliwych operacji na tak zdefiniowanym sygnale należą:

- odejmowanie składowej stałej
- wzmacnianie (zmienne w czasie)
- uśrednianie
- filtracja

Algorytm odejmowania składowej stałej polega na przekształceniu sygnału do postaci o zerowej wartości średniej.
W praktyce dość często występuje sytuacja, w której dane GPR mają przesuniętą linię odniesienia. Z tego powodu średni poziom sygnału jest różny od zera i w takim przypadku niektóre algorytmy (filtracja, wzmocnienie i in.) mogą nie funkcjonować prawidłowo.
Aby wykonać takie przekształcenie:

- oblicza się najpierw średnią arytmetyczną z całego przebiegu (rzadziej z ostatniego przedziału próbek o bardzo niskiej amplitudzie)
- odejmuje się obliczoną wartość od każdej próbki




Algorytm wzmacniania można zapisać w postaci iloczynu sygnału wyjściowego $x(t)$ oraz charakterystyki wzmocnienia $h(t)$:

$$y(t) = x(t)h(t)$$

Najczęściej stosowane są charakterystyki liniowa:

$$h(t) = A(t - t_0) + B$$

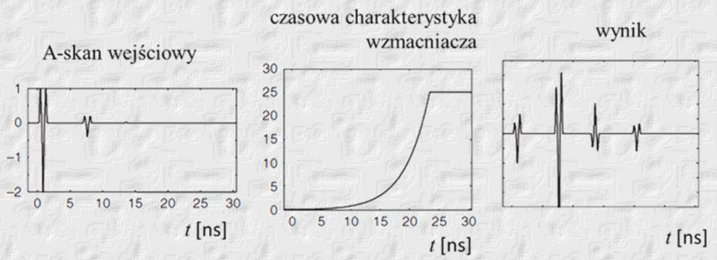
i wykładnicza:

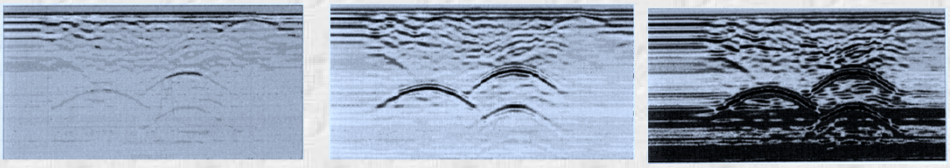
$$h(t) = Ae^{B(t-t_0)}$$

z odpowiednio dobranymi współczynnikami *A* i *B*
$t_0$ jest chwilą załączenia okna czasowego (chwilą rozpoczęcia procesu wzmacniania)

Stosowanie technik cyfrowych umożliwia realizację niemal dowolnej charakterystyki.

Stosuje się także kombinacje różnych charakterystyk, co czasami pozwala na uwypuklenie ech z odleglejszych części skanu.



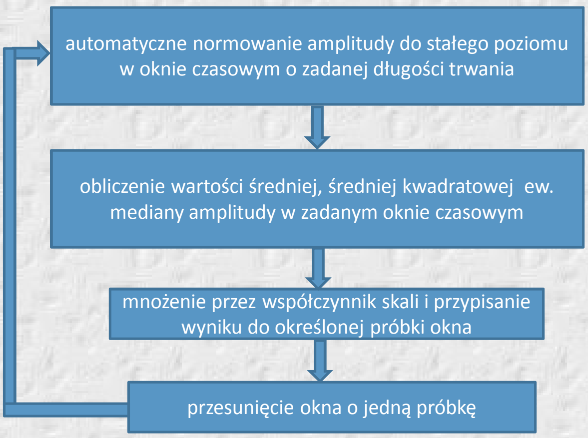



zobrazowanie wejściowe | wzm. z nachyleniem 5 dB/m | wzm. z nachyleniem 15 dB/m

Stosuje się także wzmacnianie stałe w czasie nazywane też skalowaniem trasy.

Jednym z wariantów skalowania trasy jest stałe wzmocnienie w wybranych interwałach czasowych, które można wybrać dopiero po wstępnej analizie otrzymanego falogramu.

Obok wzmacniania wg arbitralnie wybranych charakterystyk stosuje się też algorytmy wzmacniania automatycznego (AGC - ang. automatic gain control). Algorytmy te są znane również pod nazwą natychmiastowej automatycznej regulacji wzmocnienia (IAGC ang. instantaneous AGC).




Niekorzystnym efektem tego algorytmu jest nadmierne wzmacnianie niskoamplitudowego szumu losowego w końcowej części trasy.

Uśrednianie

Najprostszym wariantem uśredniania jest obliczanie tzw. średniej ruchomej tj. średniej arytmetycznej w oknie czasowym o zadanej długości, a następnie przypisanie tej wartości do środka okna. Okno to przesuwa się następnie o jedną próbkę i całą operację powtarza.

Średnia ruchoma z 2*N*+1 próbek:

$$f(t, x_i) = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} a_n f(t, x_{i+n})$$

$N$ - liczba próbek
$a_n$ - współczynniki wagowe

Proces ten jest rodzajem filtracji dolnoprzepustowej

Stosuje się także odmianę tego algorytmu w postaci odejmowania średniej ruchomej (ang. dewow):

- obliczenie średniej arytmetycznej z zadanej liczby próbek
- odjęcie obliczonej średniej od wartości środkowej okna czasowego
- przesunięcie okna o jedną próbkę
- powtórzenie operacji

Procedura ta umożliwia usunięcie zakłóceń niskoczęstotliwościowych

Do algorytmów uśredniania zalicza się także filtrację medianową.
Sprawdza się ona wtedy gdy celem procesu jest stłumienie szumu przy jednoczesnym zachowaniu krawędzi na echogramie.
Filtracja medianowa jest operacją nieliniową.

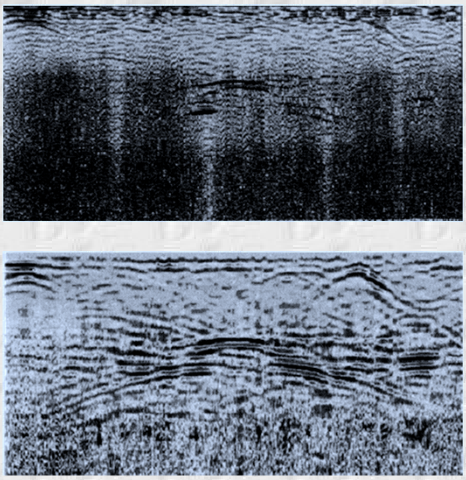
Medianą nazywa się środkową wartość z uporządkowanego zbioru *n* elementowego jeśli *n* jest nieparzyste lub średnią arytmetyczną z dwóch środkowych wartości jeśli *n* jest parzyste.

Realizując taki algorytm wyznacza się medianę w zadanym oknie, a następnie przypisuje się jej wartość do środka tego okna, które następnie się przesuwa o jedną próbkę itd.

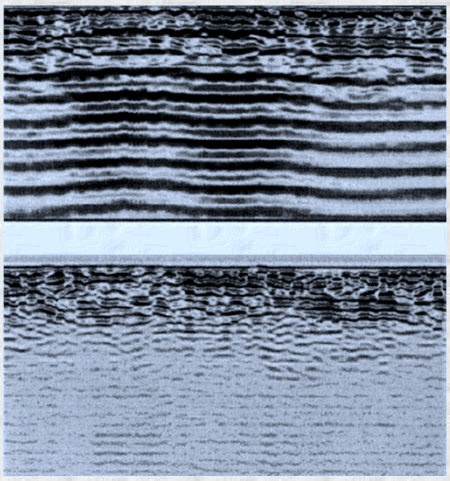
Algorytm ten usuwa wartości skrajne, bowiem nie wpływają one na wartość mediany, a przy małej liczbie próbek zmieniają znacznie wartość średniej.

Ważnym algorytmem przetwarzania A-skanów jest filtracja częstotliwościowa.
Jest ona przydatna w przypadkach, gdy istnieje wyraźna różnica w częstotliwościach pomiędzy sygnałem użytecznym, zakłóceniami zdeterminowanymi i czynnikiem losowym.
Możliwa jest realizacja filtracji zarówno w dziedzinie częstotliwości jak i czasu.
Filtracja w dziedzinie częstotliwości polega na mnożeniu widma sygnału przez transmitancję odpowiedniego filtru, co w dziedzinie czasu odpowiada operacji splotu sygnału z odpowiedzią impulsową filtru.
Najłatwiejsza w realizacji praktycznej jest filtracja w dziedzinie częstotliwości. Przed przystąpieniem do projektowania odpowiedniego filtru niezbędne jest dokonanie analizy częstotliwościowej sygnału GPR.
Aby określić parametry filtru należy zbadać widma amplitudowe kilku wybranych tras na profilu.
W technice GPR najczęściej stosuje się filtry zero-fazowe (nie wprowadzające przesunięcia fazowego)
Do przetwarzania danych GPR stosuje się zarówno filtry dolno- i górnoprzepustowe jak i pasmowoprzepustowe oraz pasmowozaporowe.
Idealny filtr ma charakterystykę prostokątną. Filtr rzeczywisty będzie miał zawsze zbocza nachylone, a kształt charakterystyki zafalowany (listki boczne i zafalowania Gibbsa).

Częstotliwościowa filtracja przebiegów czasowych zwykle wiąże się z operacjami FFT i IFFT.



efekt filtracji dolnoprzepustowej



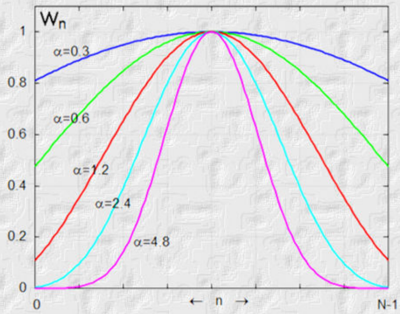
efekt filtracji górnoprzepustowej

Zmniejszenie zafalowań charakterystyk filtrów oraz redukcję efektów wykonywania przekształceń Fouriera uzyskuje się nakładając na okno prostokątne odpowiednie funkcje ważące. Do najczęściej stosowanych funkcji ważących można zaliczyć okna:
- Hamminga,
- Blackmana,
- Hahna,
- Parzena (wielomianowe),
- Bartletta (trójkątne),
- Kaisera-Bessela.

Każda z tych funkcji posiada swój charakterystyczny zestaw parametrów i w swoisty sposób wpływa na przebieg charakterystyki filtracyjnej.

okno Kaisera-Bessela

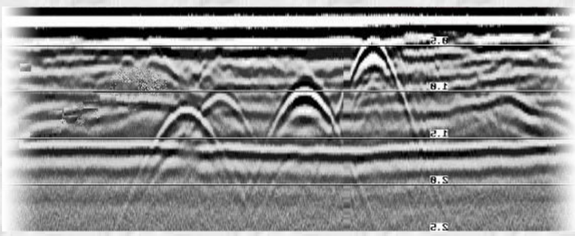
$$w(n) = \begin{cases} \dfrac{I_0\left[\pi\alpha\sqrt{1-\left(\dfrac{2n}{N-1}-1\right)^2}\right]}{I_0(\pi\alpha)} \\ 0 \quad \text{dla pozost.} \end{cases}$$




## Algorytmy zaawansowane

Do najprostszych algorytmów zaawansowanych zalicza się operacje wykonywane na grupie A-skanów. Nazywane są też one procedurami kontekstowymi. Ich celem jest przede wszystkim eliminacja poziomych ech zakłócających oraz podniesienie poziomu ech użytecznych.

Analizując echogramy można zwykle zaobserwować silną wzajemną korelację pomiędzy A-skanami.
Zakłócenia występujące w danych GPR widoczne są zwykle w postaci silnych, wąskich ech o przebiegu poziomym (odbicia fali pomiędzy anteną a powierzchnią gruntu są zwykle stałe w czasie. W odróżnieniu od tych zakłóceń echa użyteczne nie są tak dobrze skorelowane. Eliminacja wymienionych ech niepożądanych może więc polegać na odjęciu średniej trasy od całego profilu.



Realizacja procedury eliminacji ech niepożądanych polega na obliczeniu średniego A-skanu z całego profilu lub wybranego jego fragmentu.
Można to opisać następująco:

$$\overline{x}_i = \frac{1}{L}\sum_{j=0}^{L} x_{i,j}$$

$x_{i,j}$ jest $i$-tą próbką na $j$-tym A-skanie, zaś $L$ liczbą A-skanów na profilu.
$i = 0...n$ ; $n$ oznacza liczbę próbek pojedynczego A-skanu.

Po wyznaczeniu średniego A-skanu odejmuje się go od każde go A-skanu kolejnego w całym B-skanie lub jego wybranej sekcji.
Algorytm ten jest przydatny przy usuwaniu refleksów poziomych powtarzających się przez większą część falogramu.
Zastosowanie tej procedury tylko do wybranego fragmentu profilu może spowodować znaczne pogorszenie się jakości pozostałej części danych.

Kolejnym algorytmem zaawansowanym jest operacja odejmowania średniej trasy bieżącej zwana też dwuwymiarową średnią ruchomą. Procedura ta również przydatna jest przy usuwaniu refleksów poziomych, ale jest ona efektywniejsza od poprzedniej.

Realizacja polega na wyborze poziomego okna złożonego z kilku A-skanów. W oknie tym kolejno tworzy się sumaryczny A-skan, który się następnie uśredniania. Uśredniony A-skan ma postać:

$$\overline{y}_i = \frac{1}{K}\sum_{j=0}^{K} x_{i,j}$$

gdzie $K$ jest długością okna, $i = 0...n$

Obliczony w ten sposób średni A-skan odejmuje się następnie od A-skanu ze środka okna:

$$y_{i,(k-1)} = x_{i,(k-1)/2} - \overline{y}_i$$

W kolejnym kroku okno przesuwa się o jeden A-skan i cały algorytm powtarza dla kolejnych A-skanów.
Operacja tego typu usuwa refleksy poziome ciągnące się tylko przez fragment B-skanu, a ponadto uwypukla fragmenty sygnału zmieniające się w kolejnych A-skanach.
Zbyt krótkie okno generuje zwykle efekty uboczne w postaci zakłóceń koherentnych, znacznie pogarszających jakość obrazu.

Jednym z bardziej rozpowszechnionych algorytmów zaawansowanych jest filtracja *f-k* (częstotliwość - liczba falowa), która nosi też nazwę filtracji nachylenia.

Do jej realizacji wykorzystuje się dwuwymiarową transformację Fouriera.

Algorytm filtracji *f-k* nadaje się do eliminacji zakłóceń pochodzących od fal o prędkościach znacznie różniących się od prędkości fal sygnałów użytecznych. Do takich zakłóceń zaliczyć można np. odbicia od ścian budynków.

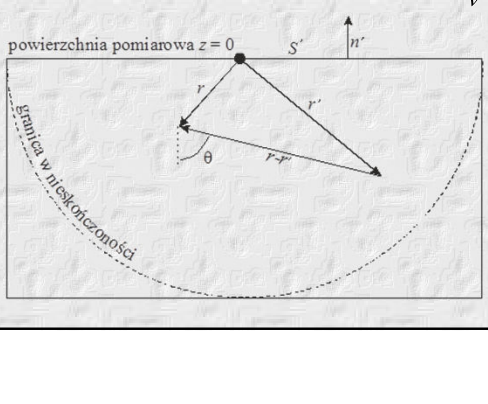
W procedurze tej oś poziomą odwzorowuje się w dziedzinie *f-k* w oś pionową, zaś oś pionową w oś poziomą *k*.
Na płaszczyźnie *f-k* definiuje się następnie tzw. strefę mutingu w kształcie klina, którego parametrem jest nachylenie jego ramion.
Procedura ta pozwala zachować amplitudy związane z liczbami falowymi *k* bliskimi zera, natomiast odrzuca te o dużych wartościach.

Procedurę kończy się powrotnym przejściem do dziedziny czasu przy wykorzystaniu IFFT.

Często obok sygnałów użytecznych występują także zakłócenia o charakterze regularnym, które są skorelowane z sygnałem użytecznym i ich eliminacja z wykorzystaniem klasycznych metod jest niemożliwa. Pomocnym narzędziem w ich eliminacji jest algorytm migracji.
Idea migracji polega na zastąpieniu każdego źródła dyfrakcji punktem. Podstawowym parametrem algorytmu migracji jest prędkość fali w ośrodku. Dokładność tego procesu zależy od precyzji jej wyznaczenia.
Do najbardziej popularnych algorytmów migracji stosowanych w technice GPR można zaliczyć migrację Kirchhoffa oraz *f-k*.

Wszystkie te algorytmy oparte są zasadniczo na rozwiązaniu równania falowego.
Migracja Kirchhoffa, zwana również ekstrapolacją przestrzenną, oparta jest o skalarne jednorodne równanie falowe:

$$\nabla^2\Psi(r,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi(r,t) = 0$$




Schemat algorytmu migracji Kirchhoffa
*r* – dystans obserwatora od celu,
*r*' – odległość wybranego punktu źródłowego od obserwatora,
*S'* – powierzchnia zawierająca wszystkie źródła,
*n*' – normalna do powierzchni *S'*

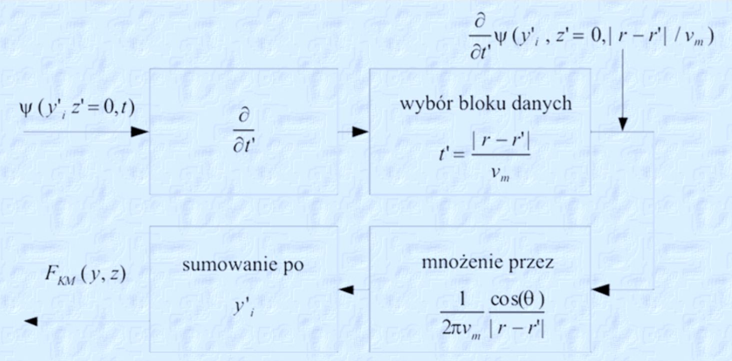
Rozwiązanie równania falowego z warunkami Dirichleta ma postać funkcji Greena, o następującej, na powierzchni gruntu, postaci ogólnej:

$$G(r,t;r',t') = g(x,g,z,t;x',g',z',t') - g(x,y,z,t;x',y',-z',t')$$

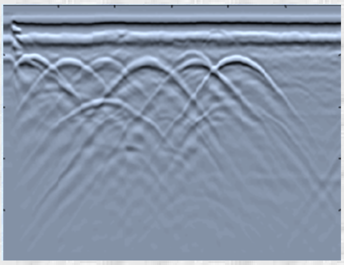
Równanie migracji Kirchhoffa dla przypadku dwuwymiarowego ma postać:

$$F_{KM}(y,z) = \frac{1}{2\pi v}\sum_{i=1}^{I}\frac{\partial}{\partial t'}\psi\left(y_i', z'=0, \frac{|r-r'|}{v}\right)\frac{\cos\theta}{|r-r'|}$$

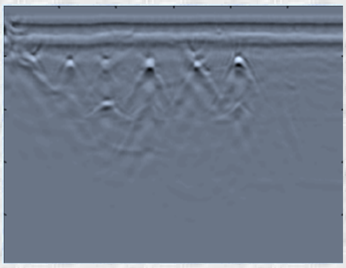
algorytm wyliczania $F_{KM}(y,z)$ jest następujący:




Wynikiem zastosowania tej procedury jest zamiana hiperboli dyfrakcyjnej na punkt będący jej wierzchołkiem. Do prawidłowego przeprowadzenia migracji konieczna jest znajomość prędkości rozchodzenia się fali elekromagnetycznej w badanym ośrodku. Koncepcyjnie procedura ta jest zbliżona do procedury SAR



dane surowe



dane po operacji migracji

Sygnał GPR zależny jest od wielu czynników (np. wielkości tłumienia fali elektromagnetycznej w ośrodku, niejednorodności ośrodka itp).
Stłumienie ich wpływu na zarejestrowany sygnał można osiągnąć za pomocą algorytmu dekonwolucji (rozplotu).
Dekonwolucja może poprawić rozdzielczość pionową.

Idea dekonwolucji

$$\xrightarrow{x(t)} \boxed{h(t)} \xrightarrow{y(t)} \boxed{d(t)} \xrightarrow{x(t)}$$

$x(t)$ – sygnał wejściowy
$h(t)$ – odpowiedź impulsowa ośrodka
$y(t)$ – rejestrowany A-skan
$d(t)$ – operator dekonwolucji

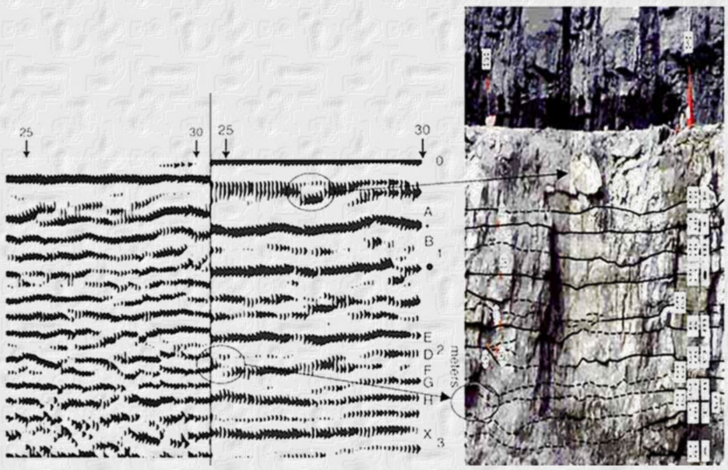
$$d(\omega) = H(\omega)^{-1}$$

Do najbardziej znanych modeli A-skanów wykorzystywanych podczas obliczania dekonwolucji zaliczyć można model Robinsona:

$$y(t) = \gamma(t)\ b(t)\ s(t)$$

$\gamma(t)$ rozkład współczynnika odbicia, $b(t)$ charakterystyka rewerberacji, $s(t)$ sygnał źródła

efekt działania dekonwolucji – znajdowanie obiektów niewidocznych na skutek interferencji




obraz wejściowy obraz wyjściowy oryginalny przekrój

## MUSIC – multiple signal classification

Niech sygnał zmierzony za pomocą VNA o $L$ schodkach częstotliwości ma postać:

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{w}$$

$$\mathbf{x} \cong \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{A} \cong \begin{bmatrix} \mathbf{a}(\tau_1) \\ \mathbf{a}(\tau_2) \\ \dots \\ \mathbf{a}(\tau_L) \end{bmatrix} \quad \mathbf{a}(\tau_K) \cong \begin{bmatrix} e^{-j2\pi f_1 \tau_L} \\ e^{-j2\pi f_2 \tau_L} \\ \dots \\ e^{-j2\pi f_K \tau_L} \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} \cong \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{w} \cong \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_L \end{bmatrix}$$

wektor amplitud

macierz parametrów opóźnień

wektor współczynników odbicia

wektor szumów

macierz kowariancji $\mathbf{x}$ ma postać

$$\mathbf{S} = \mathbf{x}\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{w})(\mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{w})^*$$

przyjmując, że sygnał i szum nie są skorelowane można zapisać

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^* + \sigma^2\mathbf{L}$$

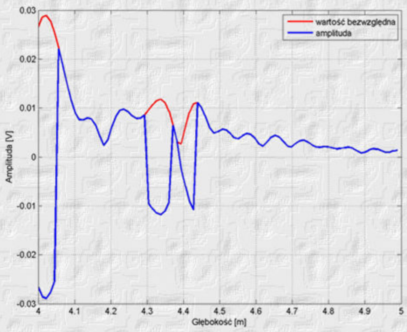
gdzie wartości wektora szumów $\mathbf{w}$ mają zerową wartość średnią i wariancję $\sigma^2$

położenie (czas opóźnienia) każdego odbijającego punktu może być wyestymowane przez szukanie maksimów funkcji $\mathbf{P}$

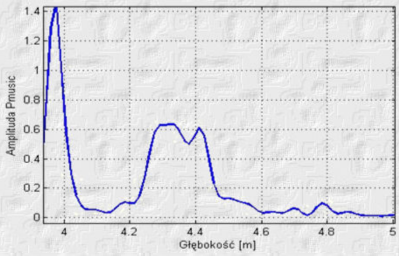
$$\mathbf{P}(\tau) = \frac{\mathbf{a}(\tau)^* \, \mathbf{a}(\tau)}{\mathbf{a}(\tau)^* E_N E_N^* \, \mathbf{a}(\tau)}$$

gdzie $E_N$ są $L(L\text{-}k)$ amplitudami szumu macierzy, o $L\text{-}k$ kolumnach złożonych z szumowych wektorów własnych

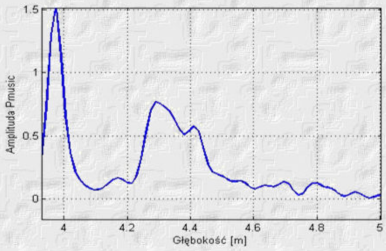
Zasadniczo obliczenie $\mathbf{P}$ sprowadza się więc do przeliczenia próbek $\mathbf{a}(\tau)$




dane z VNA




MUSIC na 282 próbkach




MUSIC na 81 próbkach

## MORFOLOGICZNE PRZETWARZANIE ZOBRAZOWAŃ GPR

Metody te nie wymagają znajomości żadnych parametrów sygnału czy też otoczenia i dlatego są obliczeniowo bardzo proste.

Metody te dają dobre rezultaty tylko w przypadku wystarczającej wartości S/N i analizowany obraz posiada wyróżniające się obszary.

Do najprostszych procedur morfologicznych zaliczane są erozja i dylatacja. Wygładzają one brzegi wykrytych obiektów.
Wadą ich jest to, że zmieniają pole powierzchni obiektów: erozja go zmniejsza , dylatacja zwiększa.
Wykonanie tych dwóch operacji, jedna po drugiej nazywane jest operacją otwarcia. Operacja odwrotna do otwarcia to zamknięcie.
Operacja otwarcia usuwa z obrazu niewielkie obiekty i drobne szczegóły nie zmieniając w sposób znaczny wymiaru obszaru zasadniczego, może również rozłączyć niektóre lokalnie stykające się obiekty.
Z kolei operacja zamknięcia wypełnia drobne wcięcia, może również posklejać niektóre bliskie obiekty.

Operacja erozji o elemencie strukturalnym polega na kolejnym pobieraniu z wynikowej macierzy (zobrazowania) bloków o podanym rozmiarze, a następnie w każdym z nich pikselem o najmniejszej wartości zastępowany jest piksel środkowy.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 |
| 8 | 19 | 12 |
| 21 | 6 | 16 |

⇒

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 |
| 8 | 3 | 12 |
| 21 | 6 | 16 |

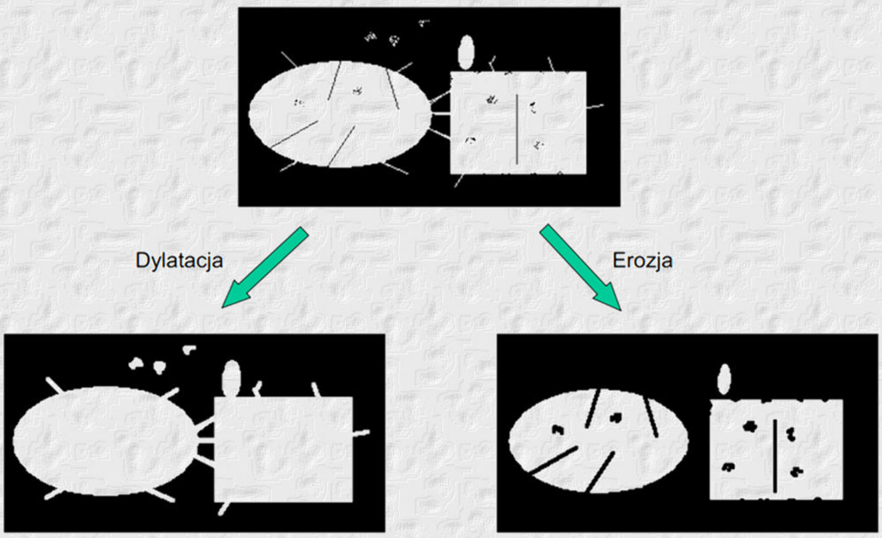
Operacja dylatacji jest podobna ale zamiast wartości najmniejszej wprowadza się w miejsce środkowego piksela wartość największą.

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 |
| 8 | 19 | 12 |
| 21 | 6 | 16 |

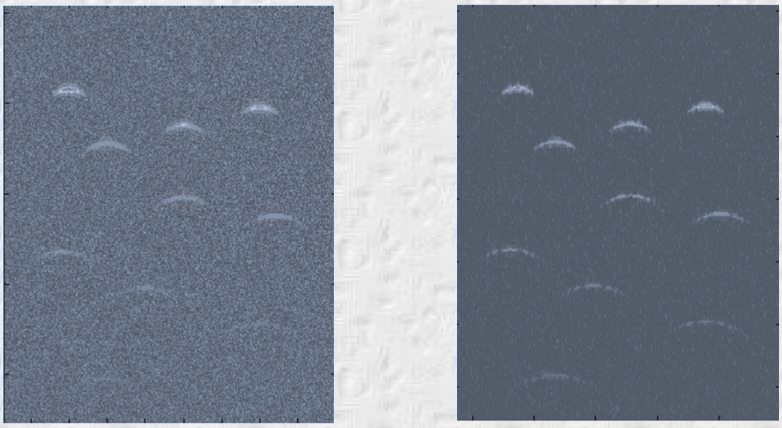
⇒

| | | |
|---|---|---|
| 4 | 7 | 3 |
| 8 | 21 | 12 |
| 21 | 6 | 16 |

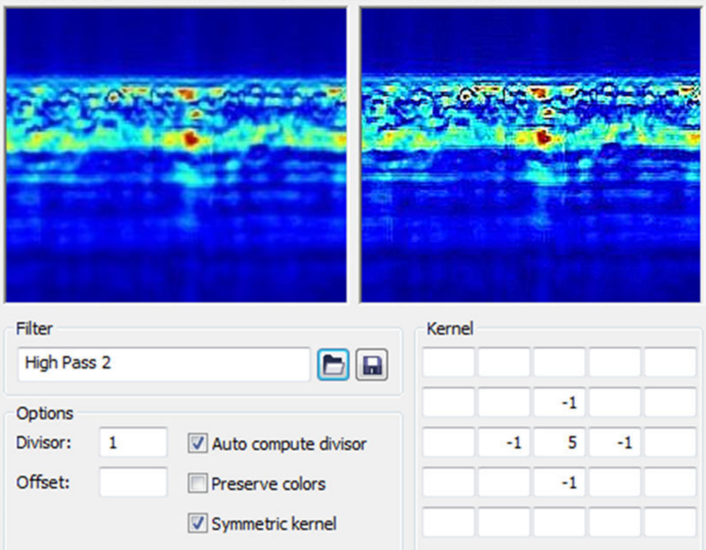
Operacje takie można przeprowadzać wykorzystując mniejsze lub większe elementy strukturalne. Mogą być one zarówno liniowe, płaskie oraz przestrzenne.



Działanie operacji otwarcia (erozja+dylatacja)



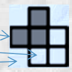
Metodą tą można realizować filtrację, obliczać gradienty, znajdować krawędzie i in.



Transformacja Hit and Miss

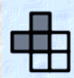
podstawowa – z niej można wywieźć wszystkie pozostałe

element strukturalny ma trzy rodzaje pikseli:
- piksele obiektu
- piksele tła
- piksele nieokreślone

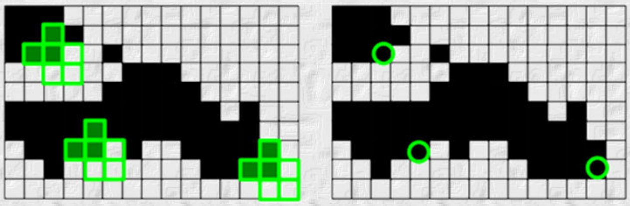


obraz wejściowy jest przemiatany określonym elementem strukturalnym.
Jeśli konfiguracja pikseli obrazu jest identyczna z pikselami elementu środkowy piksel jest ustawiany na wartość „1" jeśli nie to na wartość „0".

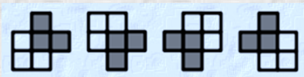
element strukturalny



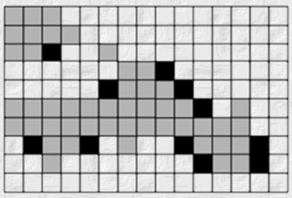
znajduje prawe dolne naroża



grupa elementów



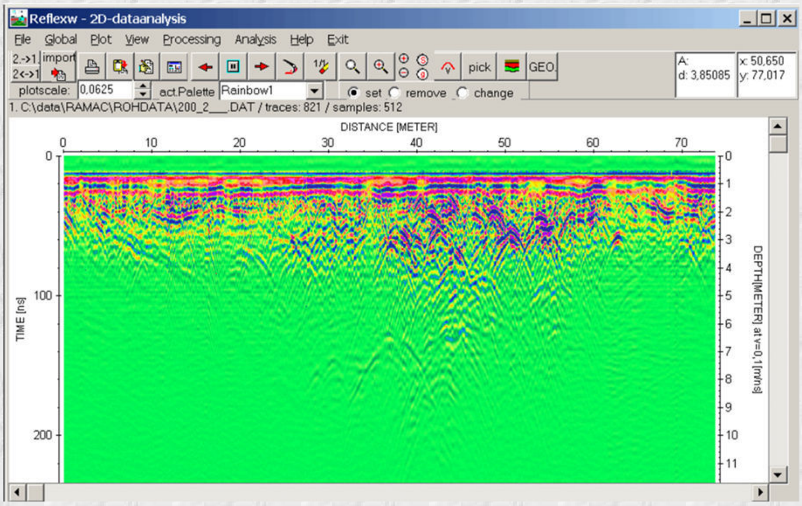
pozwoli wykryć wszystkie naroża

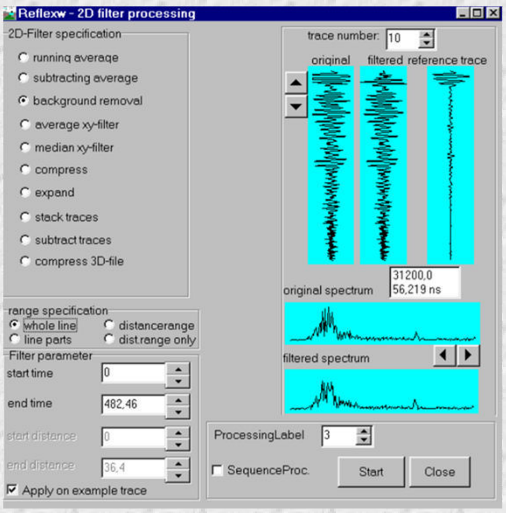


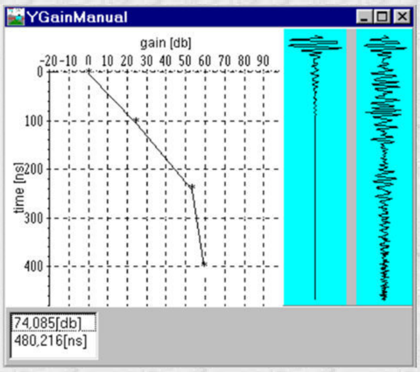
Transformacja ta pozwala znajdować określone kształty (np. hiperbole dyfrakcyjne)

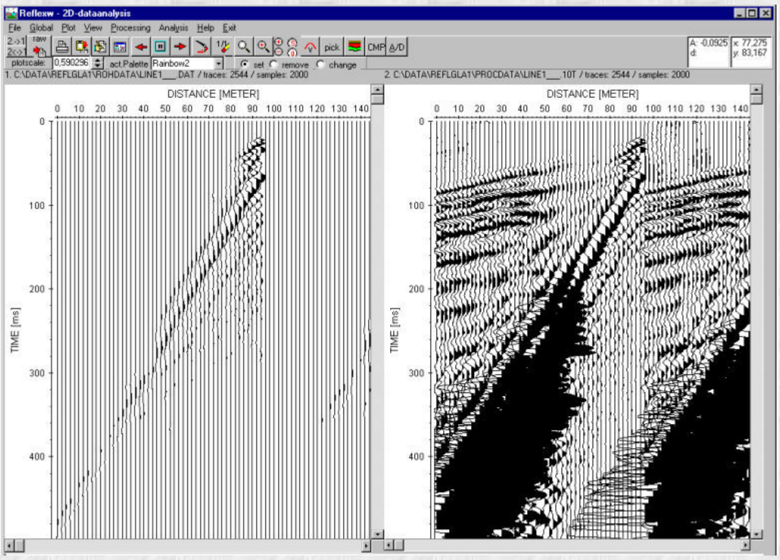
Komercyjne oprogramowanie przetwarzania sygnałów GPR

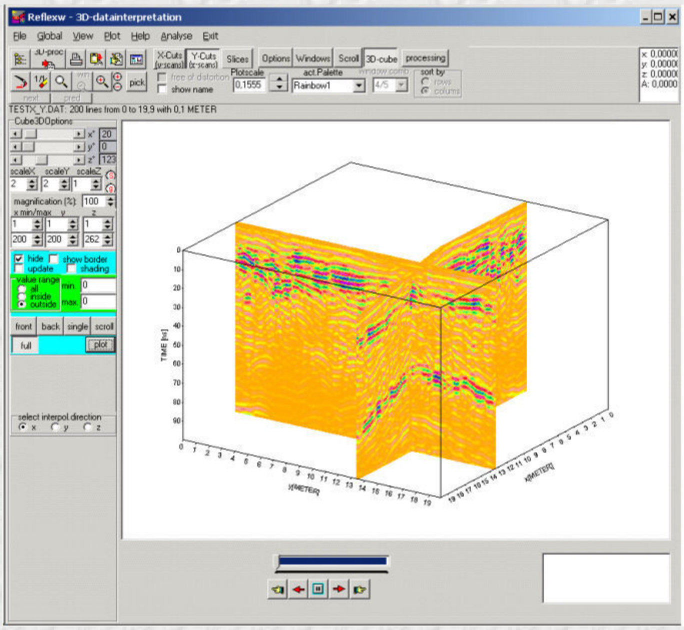
Reflex



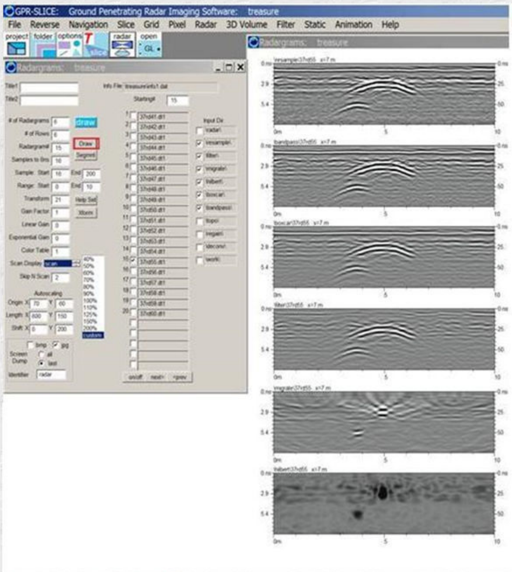



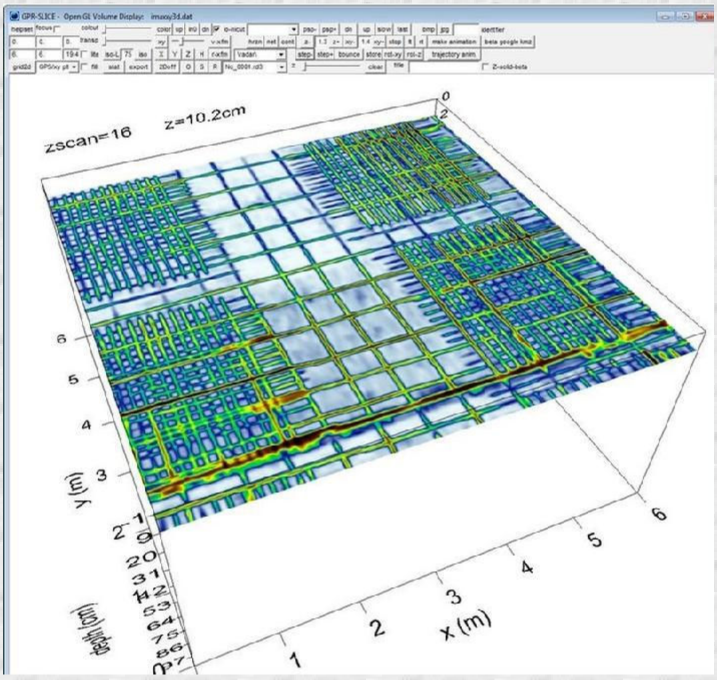

Reflexw - 2D-dataanalysis
File Global Plot View Processing Analysis Help Exit
1. C:\DATA\REFLGLA1\ROHDATA\LINE1___DAT / traces: 2544 / samples: 2000
2. C:\DATA\REFLGLA1\PROCDATA\LINE1___10T / traces: 2544 / samples: 2000
DISTANCE [METER]
TIME [ms]
DISTANCE [METER]
TIME [ms]


Reflexw - 3D-datainterpretation
File Global View Plot Help Analyse Exit
TESTX_Y.DAT: 200 lines from 0 to 19,9 with 0,1 METER
TIME [ns]
X[METER]
Y[METER]

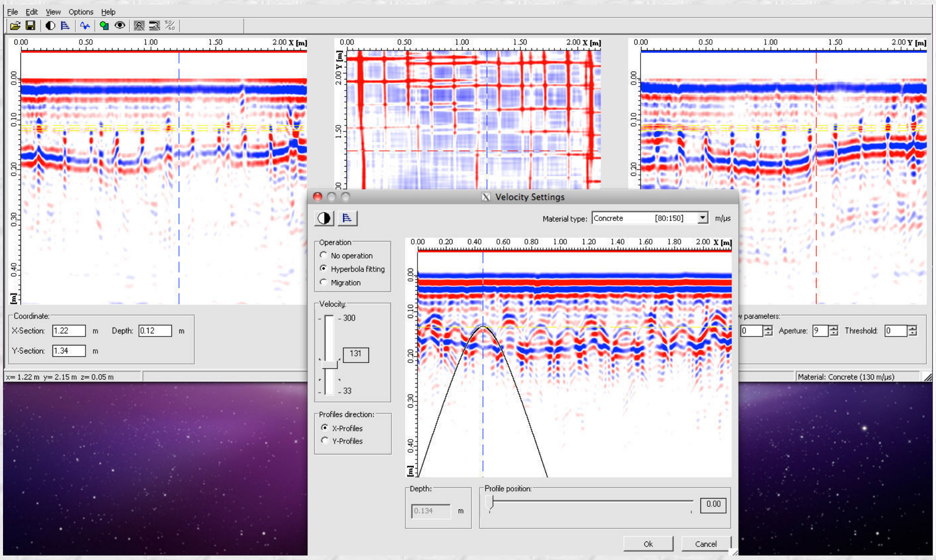
GPR Slice



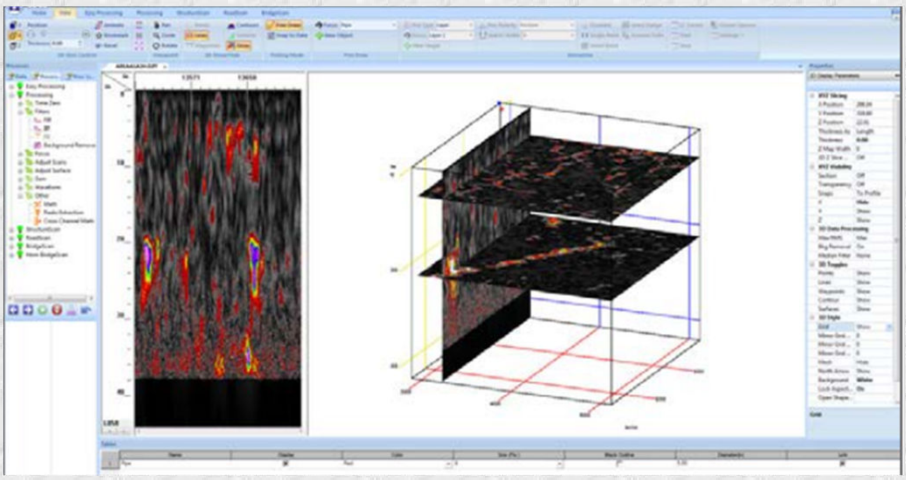

GPR Slice



## 3D Vision




## RADAN



# FDTD
# finite differential time domain

metoda różnic skończonych w dziedzinie czasu

## Równania Maxwella

Równania Maxwella mogą mieć postać zarówno różniczkową jak i całkową. Metoda FDTD bazuje na formie różniczkowej

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \nabla \times \vec{H} - \vec{J} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{D} \cdot d\vec{A} = \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} - \iint_A \vec{J} \cdot d\vec{A}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} - \vec{M} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\iint_A \vec{B} \cdot dS = -\oint_l \vec{E} \cdot dl - \iint_A \vec{M} \cdot d\vec{A}$$

Ośrodek musi być:

- liniowy
- izotropowy
- bezdyspersyjny

Założenia te pozwalają na posługiwanie się relacjami:

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}$$

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad \sigma \, in \ [S/m] \qquad \vec{M} = \sigma^* \vec{H} \quad \sigma^* \, in \ [\Omega/m]$$

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = -\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{E} - \frac{\sigma^*}{\mu} \vec{H}$$

$$\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \times \vec{H} - \frac{\sigma}{\varepsilon} \vec{E}$$

# We współrzędnych kartezjańskich

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right) \qquad \frac{\partial H_x}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} - \sigma^* H_x\right)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} - \sigma E_y\right) \qquad \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} - \sigma^* H_y\right)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \sigma E_z\right) \qquad \frac{\partial H_z}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} - \sigma^* H_z\right)$$

# Aproksymacja różnicami skończonymi

wykorzystuje szereg Taylora

$$f(x) = f(\hat{x}) + f'(\hat{x})\cdot(x-\hat{x}) + \frac{f''(\hat{x})}{2!}\cdot(x-\hat{x})^2 + \frac{f'''(\hat{x})}{3!}\cdot(x-\hat{x})^3 + \ldots$$

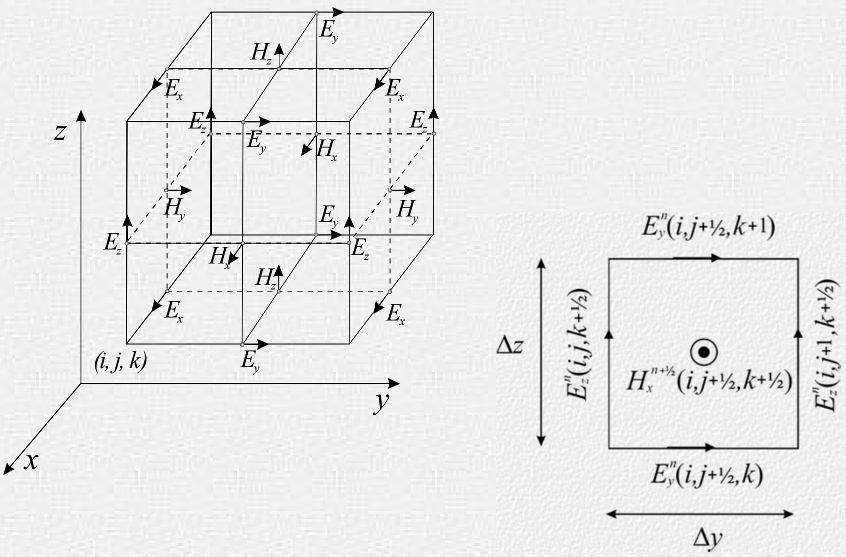
$$u(x_i+\Delta x)\big|_{t_n} = u\big|_{x_i,t_n} + \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_i,t_n} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x_i,t_n} + \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x_i,t_n} + \ldots$$

$$u(x_i-\Delta x)\big|_{t_n} = u\big|_{x_i,t_n} - \Delta x \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x_i,t_n} + \frac{\Delta x^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_{x_i,t_n} - \frac{\Delta x^3}{6}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\bigg|_{x_i,t_n} + \ldots$$

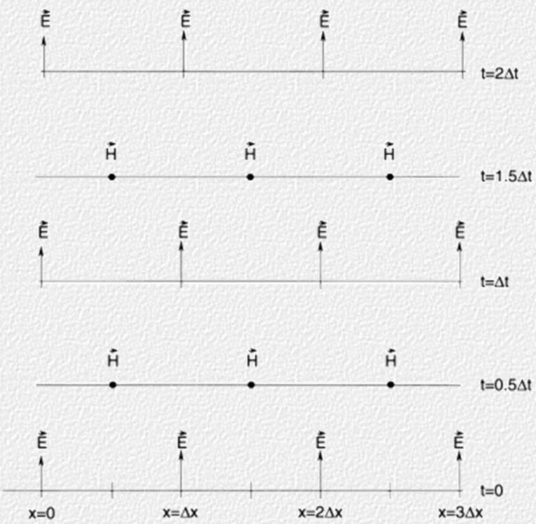
co daje $$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u(x_i+\Delta x) - u(x_i-\Delta x)}{2\Delta x} + O[(\Delta x)^2]$$

dokładność!

# Komórka Yee



## Krok czasowy Yee




## Notacja

$$u_X(i\Delta x, j\Delta y, k\Delta z, n\Delta t) = u^n_{X_{i,j,k}}$$

$$\frac{\partial u_X}{\partial x} \cong \frac{u^n_{X_{i+\frac{1}{2},j,k}} - u^n_{X_{i-\frac{1}{2},j,k}}}{\Delta x}$$

# FDTD - równania Maxwella w 3D

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} - \sigma E_x\right)$$

$$\frac{E^{n+1/2}_{X_{i,j+1/2,k+1/2}} - E^{n-1/2}_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}}{\Delta t} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon_{i,j+1/2,k+1/2}}\left(\frac{H^n_{Z_{i,j+1,k+1/2}} - H^n_{Z_{i,j,k+1/2}}}{\Delta y} - \frac{H^n_{Y_{i,j+1/2,k+1}} - H^n_{Y_{i,j+1/2,k}}}{\Delta z} - \sigma_{i,j+1/2,k+1/2} E^{n+\frac{1}{2}}_{X_{i,j,k}}\right)$$

stosując przybliżenie

$$E^n_{X_{i,j+1/2,k+1/2}} = \frac{E^{n+1/2}_{X_{i,j+1/2,k+1/2}} + E^{n-1/2}_{X_{i,j+1/2,k+1/2}}}{2}$$

otrzymuje się

$$E^{n+\frac{1}{2}}_{X_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \dfrac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}{1 + \dfrac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} \cdot E^n_{X_{i,j,k}} + \frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}{1 + \dfrac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} \cdot \left(\frac{H^n_{Z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}} - H^n_{Z_{i,j,k+\frac{1}{2}}}}{\Delta y} - \frac{H^n_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}} - H^n_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k}}}{\Delta z}\right)$$

zaś stosując jednakowe kroki przestrzenne

$$E^{n+\frac{1}{2}}_{X_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} = \frac{1 - \dfrac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}{1 + \dfrac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} \cdot E^n_{X_{i,j,k}} + \frac{\dfrac{\Delta t}{\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}{1 + \dfrac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\varepsilon_{i,j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} \cdot \left(H^n_{Z_{i,j+1,k+\frac{1}{2}}} - H^n_{Z_{i,j,k+\frac{1}{2}}} - H^n_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k+1}} + H^n_{Y_{i,j+\frac{1}{2},k}}\right)\left(\frac{1}{\Delta s}\right)$$

$$E_x^{n+1}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)=1-\frac{\sigma\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)}{\varepsilon\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)}E_x^{n}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)+$$
$$\frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)\delta}\Big[H_z^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)-H_z^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j-\tfrac{1}{2},k\right)+$$
$$+H_y^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k-\tfrac{1}{2}\right)-H_y^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)\Big]$$

$$E_y^{n+1}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)=1-\frac{\sigma\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)}{\varepsilon\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)}E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)+$$
$$\frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)\delta}\Big[H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)-H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k-\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+H_z^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)-H_z^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)\Big]$$

$$E_z^{n+1}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)=1-\frac{\sigma\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)}{\varepsilon\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)}E_z^{n}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$\frac{\Delta t}{\varepsilon\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)\delta}\Big[H_y^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)-H_y^{n+1/2}\left(i-\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+H_x^{n+1/2}\left(i,j-\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)-H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)\Big]$$

$$H_x^{n+1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)=H_x^{n-1/2}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu\delta}\Big[E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k+1\right)-E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)+$$
$$E_z^{n}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)-E_z^{n}\left(i,j+1,k+\tfrac{1}{2}\right)\Big]$$

$$H_y^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)=H_y^{n-1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu\delta}\Big[E_x^{n}\left(i+1,j,k+\tfrac{1}{2}\right)-E_y^{n}\left(i,j,k+\tfrac{1}{2}\right)+$$
$$E_x^{n}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)-E_x^{n}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k+1\right)\Big]$$

$$H_y^{n+1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)=H_z^{n-1/2}\left(i+\tfrac{1}{2},j+\tfrac{1}{2},k\right)+$$
$$+\frac{\Delta t}{\mu\delta}\Big[E_x^{n}\left(i+\tfrac{1}{2},j+1,k\right)-E_y^{n}\left(i+\tfrac{1}{2},j,k\right)+$$
$$E_y^{n}\left(i,j+\tfrac{1}{2},k\right)-E_y^{n}\left(i+1,j+\tfrac{1}{2},k\right)\Big]$$

## FDTD – 2D

W 2D istnieją tylko mody – TM i TE

Mody te nie oddziaływają na siebie

Kiedy przestrzeń jest liniowa, izotropowa i bezdyspersyjna mody te mogą być rozpatrywane oddzielnie

W 2D

$$H_{X_{i-\frac{1}{2},j+1}}^{n+1}=\frac{1-\dfrac{\sigma^{*}_{i-\frac{1}{2},j+1}\Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}}{1+\dfrac{\sigma^{*}_{i-\frac{1}{2},j+1}\Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}}\cdot H_{X_{i-\frac{1}{2},j+1}}^{n}+\frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta s\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}}{1+\dfrac{\sigma^{*}_{i-\frac{1}{2},j+1}\Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+1}}}\cdot\left(E_{Z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{Z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{3}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1}=\frac{1-\dfrac{\sigma^{*}_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}}{1+\dfrac{\sigma^{*}_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}}\cdot H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n}+\frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta s\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}}{1+\dfrac{\sigma^{*}_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\mu_{i,j+\frac{1}{2}}}}\cdot\left(E_{Z_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}-E_{Z_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$$

$$E_{Y_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}^{n+\frac{1}{2}}=\frac{1-\dfrac{\sigma^{*}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}{1+\dfrac{\sigma^{*}_{i,j+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}\cdot H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n}+\frac{\dfrac{\Delta t}{\Delta s\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}{1+\dfrac{\sigma^{*}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}\Delta t}{2\mu_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}}}}\cdot\left(H_{Y_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n}-H_{Y_{i-1,j+\frac{1}{2}}}^{n}+H_{X_{i-\frac{1}{2},j}}^{n}-H_{X_{i-\frac{1}{2},j+1}}^{n}\right)$$

Stabilność – kryterium Couranta

$$\Delta t\le\frac{1}{c\sqrt{\dfrac{1}{(\Delta x)^{2}}+\dfrac{1}{(\Delta y)^{2}}}}\qquad\Delta t\le\frac{1}{c\sqrt{\dfrac{1}{(\Delta x)^{2}}+\dfrac{1}{(\Delta y)^{2}}+\dfrac{1}{(\Delta z)^{2}}}}$$

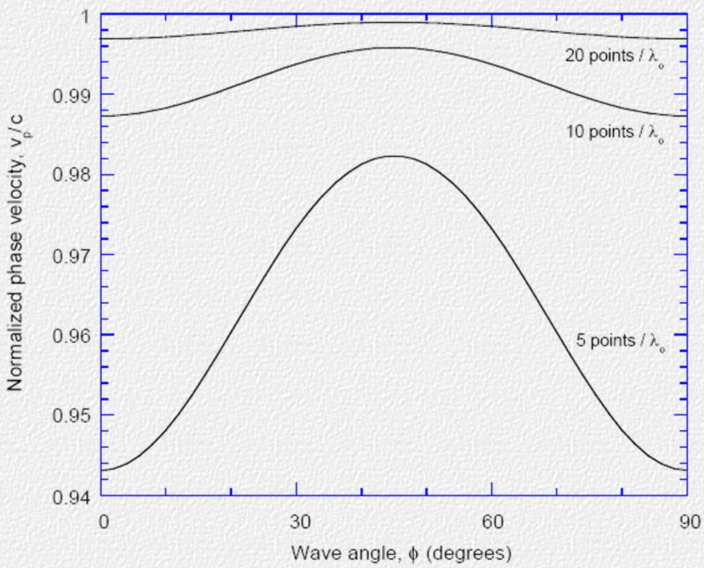
$$\Delta t\le\frac{\Delta s}{c\sqrt{2}}\qquad\Delta t\le\frac{\Delta s}{c\sqrt{3}}$$

## Dyspersja numeryczna (2D)

$$\left[\frac{1}{c\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\Delta y}\right)\sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2$$

$$\left[\frac{\Delta s}{c\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \sin^2\left(\frac{\Delta s\cdot\tilde{k}\cdot\cos(\alpha)}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{\Delta s\cdot\tilde{k}\cdot\sin(\alpha)}{2}\right)$$

$$\tilde{k}_x = \tilde{k}\cdot\cos(\alpha),\quad \tilde{k}_y = \tilde{k}\cdot\sin(\alpha)$$



- najmniejszy błąd przy kącie padania 45˚
- największy błąd przy 0˚ i 90˚ (wzdłuż osi).
- błąd maleje z kwadratem liczby kroków przestrzennych przypadających na długość fali

## Magiczny krok czasowy (przykład 3D)

najdłuższy dopuszczalny krok czasowy dla określonego kąta propagacji

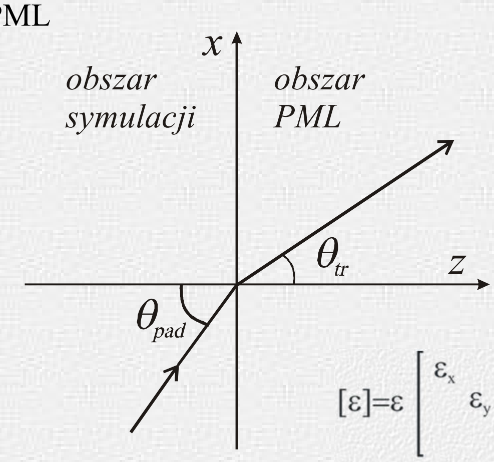
$$\left[\frac{1}{c\Delta t}\sin\left(\frac{\omega\Delta t}{2}\right)\right]^2 = \left[\left(\frac{1}{\Delta x}\right)\sin\left(\frac{\tilde{k}_x\Delta x}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\Delta y}\right)\sin\left(\frac{\tilde{k}_y\Delta y}{2}\right)\right]^2 + \left[\left(\frac{1}{\Delta z}\right)\sin\left(\frac{\tilde{k}_z\Delta z}{2}\right)\right]^2$$

$\tilde{k}_x = \tilde{k}_y = \tilde{k}_z = \tilde{k} / \sqrt{3}$ jeśli $\Delta t = \Delta s / c\sqrt{3}$

## ABC (Absorbing boundary conditions)

- często potrzeba symulować wycinek przestrzeni nieskończonej
- nie można symulować dowolnie dużej przestrzeni
- nie można „byle jak” zakończyć obszaru symulacji

PML




$$[\varepsilon]=\varepsilon\begin{bmatrix}\varepsilon_x & & \\ & \varepsilon_y & \\ & & \varepsilon_z\end{bmatrix} \quad [\sigma_M]=\mu\begin{bmatrix}\sigma_{Mx} & & \\ & \sigma_{My} & \\ & & \sigma_{Mz}\end{bmatrix}$$

$$[\mu]=\mu\begin{bmatrix}\mu_x & & \\ & \mu_y & \\ & & \mu_z\end{bmatrix} \quad [\sigma_E]=\mu\begin{bmatrix}\sigma_{Ex} & & \\ & \sigma_{Ey} & \\ & & \sigma_{Ez}\end{bmatrix}$$

Fale dla składnika TE

$$\boldsymbol{E}_{pad}(r) = E_{pad} e^{-ik_0(\sin\theta_{pad} x + \cos\theta_{pad} z)}$$

$$\boldsymbol{E}_{tr}(r) = T^{TE} E_{pad} e^{-ik_0(\sqrt{\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}} \sin\theta_{tr} x + \sqrt{\varepsilon_{11}\varepsilon_{22}} \cos\theta_{tr} z)}$$

$$\boldsymbol{E}_{odb}(r) = R^{TE} E_{pad} e^{-ik_0(\sin\theta_{pad} x + \cos\theta_{pad} z)}$$

z warunków ciągłości $1 + R^{TE} = T^{TE}$

$$\sqrt{\varepsilon_{22}\varepsilon_{33}} \sin\theta_{tr} = \sin\theta_{pad} \qquad \cos\theta_{pad} - R^{TE}\cos\theta_{tr} = T^{TE}\sqrt{\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}\cos\theta_{tr}$$

współczynnik odbicia $R^{TE} = \dfrac{\cos\theta_{pad} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}\cos\theta_{tr}}{\cos\theta_{pad} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}}}\cos\theta_{tr}}$

$R^{TE} = 0$ dla $\theta_{pad} = \theta_{tr}$ $\quad \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33}^{-1}$