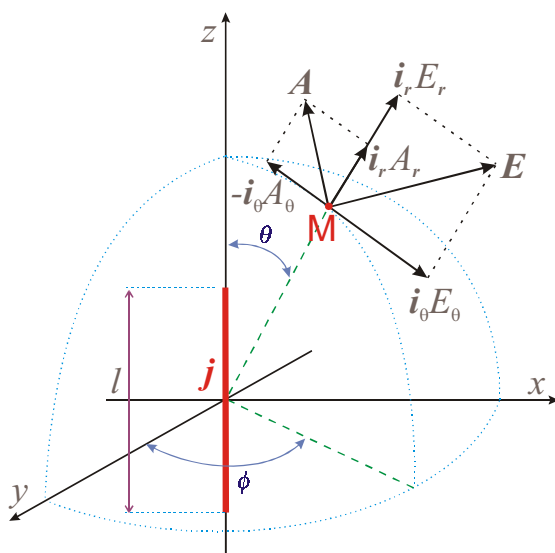


## PRAKTYCZNY DIPOL HERTZA

Dipol Hertza można w praktyce zastąpić dobrym przewodnikiem, w którym płynie zmienny prąd elektryczny. W najprostszym przypadku może to być odcinek cienkiego przewodu elektrycznego. Niech w przewodzie tym płynie prąd:

$$j = i_z I_m \sin(\omega \cdot t)$$

Umieśćmy (dla wygody) ten odcinek w środku sferycznego układu współrzędnych jak na rysunku.



Potencjał w punkcie M ogólnie wyraża się następująco:

$$A(M) = \mu \cdot \mu_0 \cdot \int j \cdot \frac{e^{-i \cdot \beta \cdot r}}{r} dV \quad \beta = \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

Ponieważ przewód jest cienki w porównaniu z jego długością całkowanie po jego objętości można zastąpić z dobrym przybliżeniem całkowaniem po długości:

$$A(M) = \mu \cdot \mu_0 \cdot \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} j \cdot \frac{e^{-i \cdot \beta \cdot r}}{r} dl$$

Jeżeli punkt M znajduje się daleko od anteny ( $r \gg l$ ) to wyrażenie podcałkowe można uznać w przyjętych granicach całkowania za niezależne od  $l$  z czego wynika:

$$A(M) = \mu \cdot \mu_0 \cdot j \cdot \frac{e^{-i \cdot \beta \cdot r}}{r}$$

Po podstawieniu założonego prądu mamy:

$$A(M) = i_z \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot \frac{e^{-i \cdot \beta \cdot r}}{r}$$

Zastosowanie związków:

$$H = \frac{1}{\mu \cdot \mu_0} \cdot \text{rot} A \quad i \quad \text{rot} H = j + \mu \cdot \mu_0 \cdot \frac{d}{dt} E$$

pozwala następnie wyliczyć składowe wektorów E i H

$$H = i_\phi \cdot H_\phi = i_\phi \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot l \cdot \beta^2 \cdot \left[ \frac{1}{\beta \cdot r} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^2} \right] \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$E = i_r \cdot E_r + i_\theta \cdot E_\theta = \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot l \cdot \beta^2 \cdot \left[ i_r \cdot 2 \cdot \left[ \frac{1}{(\beta \cdot r)^2} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^3} \right] \cdot \cos(\theta) \right] \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$\blacksquare + i_\theta \cdot \left[ \frac{1}{\beta \cdot r} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^2} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^3} \right] \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

Jak widać pole magnetyczne posiada tylko składową poprzeczną, natomiast pole elektryczne poprzeczną i podłużną.

W równaniach tych zależność od odległości określają wyrazy:  $\frac{1}{\beta \cdot r}$   $\frac{1}{(\beta \cdot r)^2}$   $\frac{1}{(\beta \cdot r)^3}$

**Dla dużych odległości** (czyli w tzw. strefie dalekiej -  $r \gg l/\beta$ ) dwa ostatnie wyrażenia można z dobrym przybliżeniem pominąć i na tej samej zasadzie wobec małości  $E_r$  w porównaniu z  $E_\theta$  zaniedbać składową radialną co daje:

$$E_\theta = \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\lambda \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$H_\phi = \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\lambda \cdot r} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

**Dla małych odległości** (czyli w tzw. strefie bliskiej -  $l \ll r \ll l/\beta$ ) można zaniedbać wyraz  $l/\beta r$  wobec  $1/(\beta r)^2$ , a obydwa te wyrazy wobec  $1/(\beta r)^3$ . W rezultacie otrzymuje się dwie składowe pola elektrycznego i jedną pola magnetycznego:

$$E_r = \frac{\lambda \cdot l \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\pi \cdot r^3} \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \cdot \cos(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$E_\theta = \frac{\lambda \cdot l \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)}{2 \cdot \pi \cdot r^3} \cdot \sqrt{\frac{\mu \cdot \mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$H_\phi = \frac{l \cdot I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)}{r^2} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

Jak widać składowa radialna ma amplitudę dwa razy większą od składowej poprzecznej i jest przesunięta w fazie o  $\pi/2$  w stosunku do wektora natężenia pola magnetycznego. Oznacza to, że średnia wartość iloczynu wektorowego tych składowych (wektora Poyntinga) wynosi 0. Energia przenoszona jest dzięki składowej poprzecznej (będącej w fazie ze składową pola magnetycznego) oraz przy pewnym współdziałaniu zaniedbanych wyrazów, co widoczne jest w strefie pośredniej gdzie iloczyn  $\beta r$  jest bliski jedności i żadnego z wyrazów zaniedbać nie można.

Dane:

$$I_m := 1 \quad [\text{A}]$$

$$f := 10^6 \quad [\text{Hz}]$$

$$\omega := 2 \cdot \pi \cdot f \quad [\text{rad/s}]$$

$$c := 3 \cdot 10^8 \quad [\text{m/s}]$$

$$\lambda := \frac{c}{f} \quad \lambda = 300 \quad [\text{m}]$$

$$l := \frac{\lambda}{2} \quad l = 150 \quad [\text{m}]$$

$$\beta := \frac{2 \cdot \pi}{\lambda}$$

$$\epsilon_0 := 8.854 \cdot 10^{-12} \quad [\text{F/m}]$$

$$\mu_0 := 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7} \quad [\text{H/m}]$$

$$H\phi(r, \theta, t) := \text{Im} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot l \cdot \beta^2 \cdot \left[ \frac{1}{\beta \cdot r} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^2} \right] \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$Er(r, \theta, t) := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \text{Im} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot l \cdot \beta^2 \cdot \left[ 2 \cdot \left[ \frac{1}{(\beta \cdot r)^2} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^3} \right] \cdot \cos(\theta) \right] \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

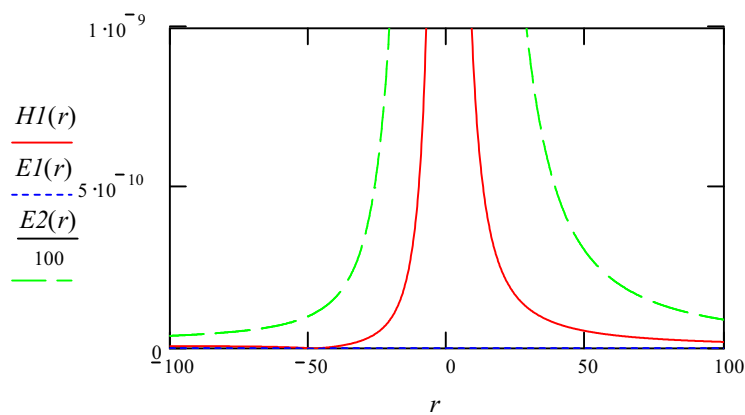
$$E\theta(r, \theta, t) := \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \text{Im} \cdot \sin(\omega \cdot t) \cdot l \cdot \beta^2 \cdot \left[ \frac{1}{\beta \cdot r} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^2} + \frac{1}{(\beta \cdot r)^3} \right] \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

Obserwacje po 1s pod kątem  $\theta = \pi/2$

$$H1(r) := \left| H\phi\left(r, \frac{\pi}{2}, 1\right) \right|$$

$$E1(r) := \left| Er\left(r, \frac{\pi}{2}, 1\right) \right|$$

$$E2(r) := \left| E\theta\left(r, \frac{\pi}{2}, 1\right) \right|$$



Widać znikome znaczenie składowej radialnej oraz silny spadek amplitud w funkcji wzrostu odległości od źródła.

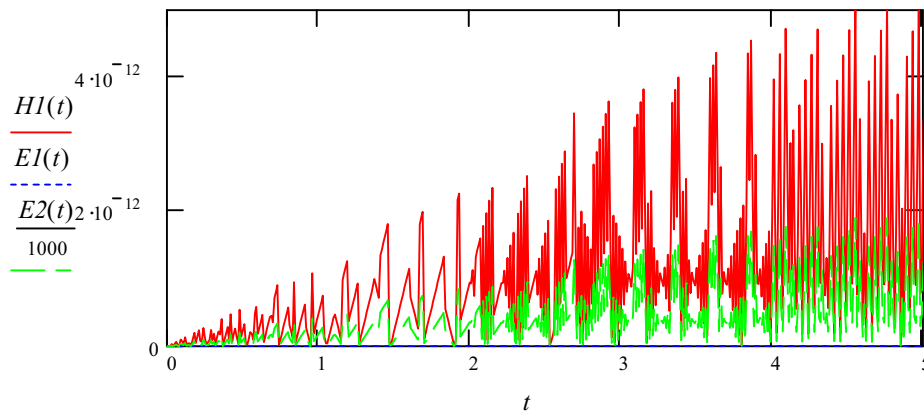
Obserwacje zmian w funkcji czasu w odległości  $r$  od źródła, pod kątem  $\theta=\pi/2$

$$t := 0, 0.01 \dots 5$$

$$H1(t) := \left| H\phi\left(10 \cdot \lambda, \frac{\pi}{2}, t\right) \right|$$

$$E1(t) := \left| Er\left(10 \cdot \lambda, \frac{\pi}{2}, t\right) \right|$$

$$E2(t) := \left| E\theta\left(10 \cdot \lambda, \frac{\pi}{2}, t\right) \right|$$



Amplituda narasta i ustala się na stałym poziomie.

Obserwacje w przybliżeniu strefy dalekiej

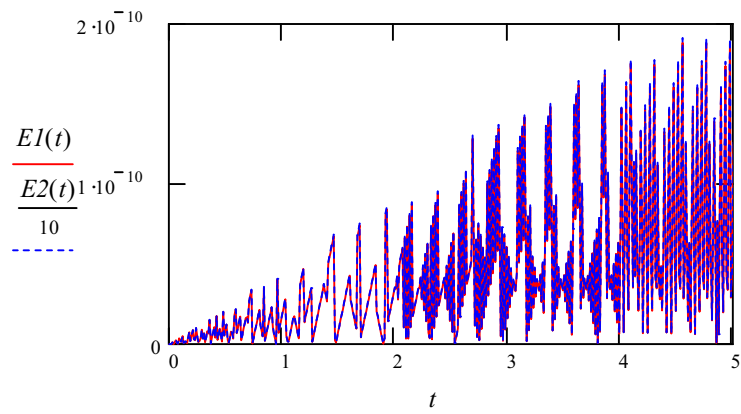
$$E\theta(r, \theta, t) := \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \text{Im} \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\lambda \cdot r} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

$$H\phi(r, \theta, t) := \frac{2 \cdot \pi \cdot l \cdot \text{Im} \cdot \sin(\omega \cdot t)}{\lambda \cdot r} \cdot \sin(\theta) \cdot e^{-i \cdot \beta \cdot r}$$

W ustalonym punkcie  $r$  pod kątem  $\theta=\pi/2$

$$E1(t) := \left| E\theta\left(100 \cdot \lambda, \frac{\pi}{2}, t\right) \right|$$

$$H1(t) := \left| H\phi\left(100 \cdot \lambda, \frac{\pi}{2}, t\right) \right|$$



W ustalonym czasie  $t$  pod kątem  $\theta = \pi/2$

$$EI(r) := \left| E\theta\left(r, \frac{\pi}{2}, 10\right) \right|$$

$$HI(r) := \left| H\phi\left(r, \frac{\pi}{2}, 10\right) \right|$$

